



Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра РК5 «Прикладная механика»

## РАБОТА № 5 ПРЯМОЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ

Экспериментальная проверка закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при чистом изгибе. Определение перемещения сечения стержня, сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов.

### Характеристика лабораторной установки.

Основным элементом лабораторной установки является: стержень двутаврового сечения из алюминиевого сплава, установленный на двух опорах. (рис. 5.1). Нагружение стержня осуществляется через коромысло 2, которое одновременно является упругим элементом силоизмерителя.

Средняя часть стержня (между опорами коромысла) находится в условиях чистого изгиба. В среднем сечении (I-I) стержня наклеены семь тензорезисторов (рис. 5.2) фольгового типа. Тензорезисторы установлены в направлении продольной оси  $z$  и позволяют измерить деформацию  $\varepsilon_z$  в соответствующих точках.

Над одним из сечений стержня установлен прогибомер, представляющий собой индикатор часового типа, закрепленный на стойке. Установка комплектуется электронным измерителем деформации.

### Краткие теоретические сведения.

Техническая теория чистого изгиба стержня основывается на следующих гипотезах:

– гипотеза плоских сечений, согласно которой поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

– гипотеза о ненадавливании продольных волокон, т.е. продольные слои в стержне при чистом изгибе стержня не взаимодействуют в перпендикулярном по отношению к ним направлении, поэтому на площадках, параллельных оси стержня нормальные напряжения равны нулю, следовательно, напряженное состояние при чистом изгибе стержня может считаться одноосным.

При изгибе стержня в нем образуются две зоны: зона растяжения и зона сжатия. Границей между зонами растяжения и сжатия является продольный слой, называемый нейтральным. Этот слой искривляется, но его длина не изменяется.

Введем прямоугольную систему координат  $(x, y, z)$ , где  $x$  и  $y$  – центральные оси сечения (ось  $y$  лежит в плоскости изгибающего момента, а ось  $x$  – в нейтральном слое).

На основании гипотезы плоских сечений можно сделать вывод о характере изменения длины продольных слоев: удлинения  $\Delta l$  прямо пропорциональны  $y$ . Так же изменяются и относительные деформации  $\varepsilon_z$ , поскольку длина всех волокон стержня до деформации одинакова.

Напряжения связаны с деформациями законом Гука для одноосного напряженного состояния:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$$

где  $\sigma_z$  - нормальное напряжение в поперечном сечении стержня,

$E$  - модуль упругости 1-ого рода.

Теоретические значения нормальных напряжений определяют по формуле:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y,$$

где  $M_x$  - изгибающий момент в сечении относительно оси  $x$ ,

$I_x$  - осевой момент инерции сечения относительно оси  $x$ ,

$y$  - ордината точки, в которой определяют напряжение.

Значение нормальных напряжений, вычисленных по теоретической формуле и по измеренным деформациям, должны совпадать.

### Определение перемещения точки А.

Определим перемещение точки А, используя универсальное уравнение упругой линии (метод Коши-Крылова). Расчетная схема стержня приведена на рис. 5.3.

Дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид:

$$E \cdot I_x \cdot v'' = M_x(z)$$

Универсальное уравнение упругой линии записываем в форме:

$$EI_x v'' = \frac{F}{2} \cdot z \Big|_1 - \frac{F}{2} \left( z - \frac{l}{3} \right) \Big|_2 - \frac{F}{2} \left( z - \frac{2}{3} \cdot l \right) \Big|_3.$$

По существу здесь три уравнения для участков 1, 2 и 3, вложенные одно в другое. Такой способ записи приводит к равенству постоянных интегрирования на всех трех участках. После двойного интегрирования имеем:

$$EI_x v = C_2 + C_1 \cdot z + \frac{F}{2} \cdot \frac{z^3}{6} \Big|_1 - \frac{F}{2} \frac{\left( z - \frac{l}{3} \right)^3}{6} \Big|_2 - \frac{F}{2} \frac{\left( z - \frac{2}{3} \cdot l \right)^3}{6} \Big|_3.$$

Граничные условия:

$$1. \ z = 0, v = 0$$

$$2. \ z = l, v = 0.$$

Условие 1 подставляем в уравнение для 1-го участка, откуда  $C_2 = 0$ .

Условие 2 подставляем в уравнение для 3-го участка:

$$0 = C_1 \cdot l + \frac{F}{12} \left( l^3 - \frac{8}{27} l^3 - \frac{1}{27} l^3 \right),$$

$$C_1 = -\frac{F \cdot l^2}{18}.$$

Окончательное уравнение упругой линии приобретает вид:

$$v = \frac{F}{6EI_x} \left( -\frac{l^2}{3} \cdot z + \frac{z^3}{2} \Big|_1 - \frac{\left( z - \frac{l}{3} \right)^3}{2} \Big|_2 - \frac{\left( z - \frac{2}{3} \cdot l \right)^3}{2} \Big|_3 \right).$$

Точка А находится на 1-м участке, поэтому координату  $z_A = \frac{l}{4}$  подставляем в

уравнение для 1-го участка:

$$v_A = \frac{F}{6EI_x} \left[ -\frac{l^2}{3} \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{4} \right)^3 \right] = -\frac{29}{6 \cdot 3 \cdot 128} \frac{Fl^3}{EI_x} = -0,0126 \frac{Fl^3}{EI_x}.$$

### Порядок проведения работы

1. Включите электронный измеритель деформаций за несколько минут до начала эксперимента.
2. Выведите на нуль стрелку прогибомера.
3. Снимите отсчеты по всем семи тензорезисторам при нулевой нагрузке.
4. Вращая винт 3 (рис. 5.1), увеличивайте нагрузку ступенями: 1000 Н, 2000 Н, 3000 Н. Величина нагрузки определяется по показаниям индикатора, соединенного с нагружающим устройством:

1000 Н – 0,30 мм

2000 Н – 0,60 мм

3000 Н – 0,90 мм.

При каждом из трех значений нагрузки снимайте показания по шкалам прогибомера и электронного измерителя деформаций для каждого из семи тензорезисторов.

5. Проведите обработку результатов эксперимента и все теоретические расчеты согласно порядку, определенному в журнале наблюдений.

Примечание: не рекомендуется принимать в расчет разницу отсчетов по прогибомеру при изменении нагрузки от 0 до 1000 Н, т. к. на этом участке происходит выбор зазоров в системе, не имеющих отношения к перемещению сечения под действием нагрузки.