Соотношения жесткостей стержня

В курсе сопротивления материалов изучаются три из четырех существующих видов нагружения: растяжение-сжатие, кручение и изгиб. Стержни, работающие на эти виды нагружения, имеют, соответственно, осевую EA, крутильную $GI_{\text{К}}$ и изгибную EI_x жёсткости. Полезно сравнить их величины – это позволяет в некоторых случаях существенно упростить решение задачи.

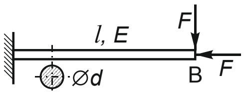

Рис. 1

Начнем со сравнения осевой и изгибной жесткостей (Рис. 1). Выбрана самая простая расчётная схема и самое простое сечение. И вот тут оказывается, что невозможно просто сопоставить жёсткости, поскольку осевая имеет размерность [Н], а изгибная – [Н·м^2]. Тогда приходится вспомнить, что жёсткость – величина, обратная податливости, а последняя по своей физической сути есть перемещение. То есть получается, что отношение жесткостей есть величина, обратная отношению перемещений, причем, поскольку в обоих случая происходят линейные перемещения (при растяжении-сжатии – только, а при изгибе – в том числе), следует найти именно отношение соответствующих линейных перемещений при двух видах нагружения. Но о линейных перемещениях какого именно сечения идет речь?

В общем виде на этот вопрос нет ответа. Не существует способа описать жёсткость конструкции одним числом без дополнительных пояснений, подобно тому, как прочность описывается расчётным коэффициентом запаса. Но в данной, весьма простой, задаче, эта трудность преодолима: возьмём линейные перемещения конца консоли, сечения В. Во-первых, их можно назвать «характерными» (хотя точное определение этого понятия также не существует). Во-вторых, они оба являются максимальными.

$$\frac{\text{осевая жёсткость}}{\text{изгибная жёсткость}}=\frac{\dfrac{1}{w_{\max}}}{\dfrac{1}{v_{\max}}}=\frac{v_{\max}}{w_{\max}}=\frac{\dfrac{1}{3}\dfrac{Fl^3}{EI_x}}{\dfrac{Fl}{EA}}=\frac{1}{3}l^2\frac{A}{I_x}=\frac{1}{3}l^2\frac{\dfrac{\pi d^2}{4}}{\dfrac{\pi d^4}{32}}=\frac{8}{3}\left(\frac{l}{d}\right)^2$$

Дробь в скобках согласно гипотезе стержня ($l >> d$) существенно превышает единицу. А поскольку она еще и возводится в квадрат, то получается, что изгибная жёсткость настолько меньше осевой, что в подавляющем большинстве задач последняя может считаться равной бесконечности.

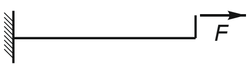

Рис. 2

Правда, есть довольно казуистические, но вполне корректные примеры, опровергающие данное положение, скажем, расчётная схема Рис. 2. Оценивая, например, перемещение точки приложения силы, можно обнаружить, что горизонтальное перемещение, вызванное растяжением, оказывается сопоставимым по величине с прогибом. Тогда приходится учитывать обе жёсткости.

Но в большинстве реальных задач при действии одновременно осевых и изгибающих нагрузок перемещениями, связанными с растяжением-сжатием, обычно пренебрегают, и учитывают только изгибные перемещения.

Теперь перейдём к сравнению изгибной и крутильной жесткостей. С одной стороны, теперь эти величины имеют одинаковые размерности, и их можно сравнивать напрямую, без определения перемещений. С другой стороны, приходится учитывать и свойства материала, и свойства сечений, причем всех существующих.

Начнем с материала. По сути дела, требуется найти отношение модулей упругости I и II рода:

$$\frac{E}{G}=\frac{2(1+\mu)\cdot E}{E}=2(1+\mu)$$

Для изотропных, сплошных и однородных материалов коэффициент Пуассона может меняться от 0 до $\frac{1}{2}$, а отношение модулей упругости, соответственно, от 2 до 3. Здесь даже нет нужды уточнять, что для большинства металлов диапазон изменения коэффициента Пуассона гораздо у́же – примерно 0.25…0.4. В любом случае полученное число имеет порядок единицы и, значит, материал не может повлиять на то, чтобы одна жёсткость оказалась существенно больше другой.

Иначе обстоит дело с отношением моментов инерции – осевого и крутильного (последний правильно называть «геометрической характеристикой жёсткости»). Различных сечений – бесконечное разнообразие, и перебрать все до одного просто невозможно. Но стоит вспомнить, что стержни с круговыми сечениями (сплошной круг, тонкостенная и толстостенная трубы) очень хорошо, точнее, лучше любых других, работают на кручение, и весьма посредственно – на изгиб. Таким образом, можно ожидать, что для них крутильный момент инерции достигает максимальной, а осевой – некоей средней величины. Тогда отношение моментов инерции в силу симметрии равно двум.

Полученное число также имеет порядок единицы, а это значит, что крутильная жёсткость не может существенно превышать изгибную.

Теперь следует найти сечение стержня, который, напротив, очень хорошо работает на изгиб и плохо – на кручение. Здесь уместно учесть, что тонкостенные открытые профили работают на кручение несравненно хуже, чем любые другие. Значит, именно среди них надо искать сечение с максимальным осевым моментом инерции. Такое сечение тоже известно – это двутавр. Но с тем же успехом можно рассмотреть и прямоугольник, у которого ширина гораздо меньше высоты (Рис. 3), причем изгиб предполагается происходящим в вертикальной плоскости. Именно в силу соотношения $h >> b$ такую фигуру можно мыслить уже не как прямоугольник, а как тонкостенное открытое сечение, для которого

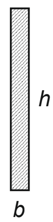

Рис. 3

$$\frac{I_x}{I_K} = \frac{\frac{1}{12} bh^3}{\frac{1}{3} hb^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{h}{b}\right)^2$$

Таким образом, отношение осевого момента инерции к крутильному, а следовательно, и изгибной жёсткости к крутильной, можно сделать сколь угодно большим.

Рассмотренный пример с вытянутым прямоугольником также является довольно искусственным. Балка с сечением такого вида при изгибе крайне склонна к локальной потере устойчивости и поэтому не применяется на практике. Если же рассмотреть некий двутавр из ГОСТ, то для него, по приблизительным подсчётам, отношение жесткостей равно нескольким сотням. Можно сказать, что таково максимальное значение этого отношения для всех практически важных сечений.

Что же касается сечений, входящих в домашнее задание по плоскопространственным рамам, то для этих сечений максимальная величина отношения моментов инерции составляет чуть больше трех – для тонкостенного прямоугольника с высотой, вдвое превышающей ширину. Для таких сечений, как, например, сплошной прямоугольник с высотой, вдвое меньшей ширины, это отношение вообще меньше единицы.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- Для подавляющего большинства расчётных схем осевая жёсткость существенно больше и изгибной, и крутильной жесткостей, причем это соотношение зависит от расчётной схемы и почти не зависит от сечения;
- Для большинства традиционных сечений изгибная жёсткость имеет один порядок с крутильной, хотя для некоторых сечений может превышать её на два порядка. Зависит это отношение только от формы сечения и никак не зависит от расчётной схемы.