

Расчет плоского глубинного щитового затвора

Глубинные щитовые затворы предназначены для перекрытия прямоугольных и круглых отверстий. Применяются в таких сооружениях водоснабжения и канализации, как горизонтальные отстойники, приемные резервуары, колодцы, камеры горячей и холодной воды, распределительные камеры и т. п. Примеры затворов показаны на Рис. 1.



Рис. 1

Затвор может быть сведен к расчетной схеме прямоугольной пластины постоянной толщины, заделанной по контуру и нагруженной давлением воды, изменяющимся с глубиной по линейному закону (Рис. 2, а). Поэтому такую нагрузку иногда называют гидростатической.

Ниже будет решена задача изгиба пластины в двумерной приближенной постановке.

Если выделить малую вертикальную полоску пластины, удаленную от ее краев (например, вдоль прямой ВС), то, пренебрегая влиянием вертикальных заделанных сторон пластины, полоску можно свести к расчетной схеме балки, защемленной двумя концами и подверженной действию гидростатической нагрузки (Рис. 2, б).

Далее, разбив балку по суперпозиции на Рис. 2, в и г, рассмотрим сначала расчетную схему Рис. 2, в.

Изначально задача трижды статически неопределима. Но, пренебрегая весом пластины и очень высокой осевой жесткостью, можно не учитывать нормальные силы. Тогда задача оказывается дважды статически неопределимой.

Игнорирование собственного веса конструкции позволяет расположить балку в привычной горизонтальной ориентации с традиционным направлением осей (Рис. 3, а). Выберем основную систему (Рис. 3, б), построим эквивалентную систему (Рис. 3, в) и рассмотрим состояние «F» (Рис. 3, г). Отбросив заделку, заменим ее реакциями, направленными согласно правилу знаков (Рис. 3, д).

Выделим на текущем расстоянии z малый участок dz , нагрузка на котором будем равна $q \cdot z$, где $q = \frac{q_0}{l}$, и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_y = -\int_0^l qz \, dz - R_2 = 0 \rightarrow R_2 = -q \int_0^l z \, dz = -q \frac{z^2}{2} \Big|_0^l = -\frac{ql^2}{2};$$

$$\begin{aligned} \sum M_D = -\int_0^l qz(l-z) \, dz - R_1 = 0 \rightarrow R_1 = -q \int_0^l (lz - z^2) \, dz &= -q \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^l = \\ &= -ql^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{ql^3}{6} \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что равнодействующая сосредоточенная сила получилась по модулю равной площади фигуры под распределенной нагрузкой (в данном случае – треугольника), а изгибающий

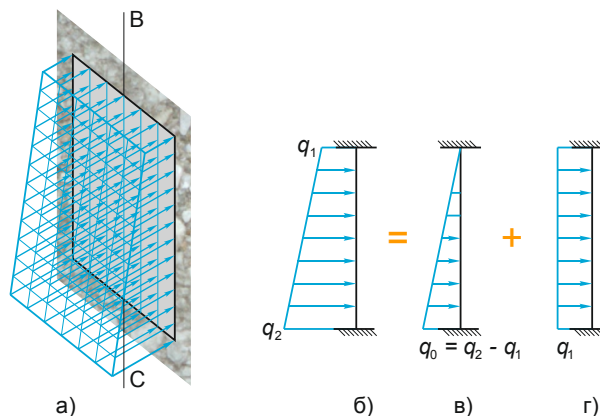


Рис. 2

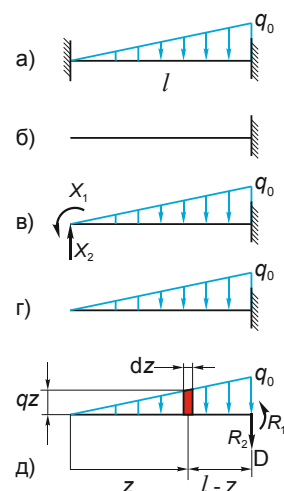


Рис. 3

момент относительно заданной точки – статическому моменту фигуры (общее слово «момент» здесь вовсе не случайно!) относительно оси, проходящей через эту точку перпендикулярно оси стержня.

В самом деле, площадь треугольника Рис. 3, a равна $\Omega = \frac{1}{2}q_0l$, расстояние до центра его тяжести от точки D равно $z_C = \frac{1}{3}l$, и тогда

$S_y = \Omega \cdot z_C = \frac{1}{2}q_0l \cdot \frac{1}{3}l = \frac{1}{6}q_0l^2 = \frac{1}{6}ql^3$. То же самое, кстати, справедливо и для постоянной нагрузки как для частного случая переменной.

Эпюры имеют вид Рис. 4, а соответствующие функции запишутся так:

$$M(z) = -\frac{1}{6}qz^3; \quad M_1 = -1; \quad M_2 = z \quad (1)$$

Компоненты матрицы податливостей равны

$$\delta_{11} = l; \quad \delta_{22} = \frac{1}{3}l^3; \quad \delta_{12} = -\frac{1}{2}l^2 \quad (2)$$

Обобщенные перемещения от внешней нагрузки найдем сперва методом Мора:

$$\delta_{1F} = \int_0^l M(z)M_1 dz = \frac{1}{6}q \int_0^l z^3 dz = \frac{1}{6}q \cdot \frac{l^4}{4} = \frac{1}{24}ql^4; \quad (3)$$

$$\delta_{2F} = \int_0^l M(z)M_2 dz = -\frac{1}{6}q \int_0^l z^4 dz = -\frac{1}{6}q \cdot \frac{l^5}{5} = -\frac{1}{30}ql^5$$

Проверка методом Верещагина потребует знания площади фигуры Рис. 4, a , и положение ее центра тяжести. Для ответов на эти вопросы можно вывести формулу для степенной функции общего вида

$$y(z) = h \left(\frac{z}{l} \right)^n$$

график которой показан на Рис. 5:

$$\Omega = \int_0^l y(z) dz = \int_0^l h \left(\frac{z}{l} \right)^n dz = \frac{h}{l^n} \int_0^l z^n dz = \frac{h}{l^n} \frac{z^{n+1}}{n+1} \Big|_0^l = \frac{h}{l^n} \frac{l^{n+1}}{n+1} = \frac{h \cdot l}{n+1}$$

$$S_y = \int_0^l z \cdot y(z) dz = \int_0^l z \cdot h \left(\frac{z}{l} \right)^n dz = \frac{h}{l^n} \int_0^l z^{n+1} dz = \frac{h}{l^n} \frac{z^{n+2}}{n+2} \Big|_0^l = \frac{h}{l^n} \frac{l^{n+2}}{n+2} = \frac{h \cdot l^2}{n+2}$$

$$z_C = \frac{S_y}{\Omega} = \frac{h \cdot l^2}{n+2} \cdot \frac{n+1}{h \cdot l} = l \frac{n+1}{n+2}$$

Нетрудно убедиться, что для частных случаев $n = 0$ (прямоугольник), $n = 1$ (треугольник), и $n = 2$ («квадратичный треугольник») полученные формулы возвращают хорошо знакомые результаты.

Однако нас интересует случай $n = 3$. Полагая $h = \frac{ql^3}{6}$ (Рис. 4, a), имеем

$$\Omega = \frac{h \cdot l}{n+1} = \frac{ql^3}{6} \cdot \frac{l}{4} = \frac{ql^4}{24}; \quad z_C = \frac{4}{5}l \rightarrow \delta_{1F} = \frac{ql^4}{24}; \quad \delta_{2F} = \frac{ql^4}{24} \cdot \left(-\frac{4}{5}l \right) = -\frac{ql^5}{30}$$

Проверка с формулами (3) сошлась.

Система канонических уравнений метода сил второго порядка

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2F} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

с коэффициентами (2) и (3) дает решения

$$X_1 = \frac{1}{30}ql^3; \quad X_2 = \frac{3}{20}ql^2$$

Тогда из формул (1) следует суммарная функция моментов расчетной схемы Рис. 2, b :

$$M_x(z) = M(z) + M_1X_1 + M_2X_2 = -\frac{1}{6}qz^3 - \frac{1}{30}ql^3 + \frac{3}{20}ql^2z$$

или, после перехода к исходным обозначениям:

$$M_x(z) = \frac{1}{2} \frac{q_2 - q_1}{l} \left(-\frac{1}{3}z^3 + \frac{3}{10}l^2z - \frac{1}{15}l^3 \right) \quad (5)$$

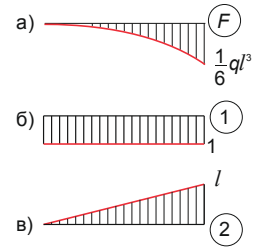


Рис. 4

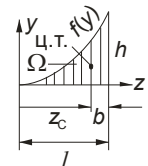


Рис. 5

Для еще одной проверки рассмотрим другую основную систему (Рис. 6, а). Эквивалентная система показана на Рис. 6, б, а безопорная конструкция – на Рис. 6, в. Реакции:

$$\Sigma F_y = R_1 + R_2 - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\Sigma M_D = -R_1 l + \frac{ql^2}{2} \frac{1}{3} l = 0 \rightarrow R_1 = \frac{ql^2}{6}; \quad \Sigma M_G = -R_2 l + \frac{ql^2}{2} \frac{2}{3} l = 0 \rightarrow R_2 = \frac{ql^2}{3}$$

$$R_1 + R_2 - \frac{ql^2}{2} = \frac{ql^2}{6} + \frac{ql^2}{3} - \frac{ql^2}{2} = 0$$

Функция внешних сил будет являться уже не простой степенной, как (1), а двучленом, поэтому выведенные выше формулы для площади и центра тяжести эпюры уже не помогут проверить решение методом Верещагина. Таким образом, эпюру «F» строить нет необходимости, а вот единичные эпюры показаны на Рис. 6, з и д.

Функции имеют вид

$$M(z) = R_1 z - \frac{1}{6} qz^3 = \frac{ql^2}{6} z - \frac{1}{6} qz^3 = \frac{q}{6} (l^2 z - z^3)$$

$$M_1 = -1 + \frac{z}{l} = \frac{z}{l} - 1; \quad M_2 = -\frac{z}{l}$$

Коэффициенты системы (4):

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{3} l; \quad \delta_{12} = \frac{1}{6} l$$

$$\delta_{1F} = \int_0^l M(z) M_1 dz = \frac{q}{6} \int_0^l (l^2 z - z^3) \left(\frac{z}{l} - 1 \right) dz = \frac{q}{6} \int_0^l \left(l^2 z - l^2 z - \frac{z^4}{l} + z^3 \right) dz = \frac{q}{6} \left(l \frac{z^3}{3} - l^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^5}{5l} + \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^l =$$

$$= \frac{ql^4}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{ql^4}{6} \cdot \frac{7}{60} = -\frac{7}{360} ql^4$$

$$\delta_{2F} = \frac{q}{6} \int_0^l (l^2 z - z^3) \left(-\frac{z}{l} \right) dz = -\frac{q}{6l} \int_0^l (l^2 z^2 - z^4) dz = -\frac{q}{6l} \left(l^2 \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right) \Big|_0^l = -\frac{ql^4}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = -\frac{ql^4}{6} \frac{2}{15} = -\frac{ql^4}{45}$$

и ее решение:

$$X_1 = \frac{1}{30} ql^3; \quad X_2 = \frac{1}{20} ql^3$$

Можно убедиться, что суммарная функция моментов получилась такой же.

Сравнивая рассмотренные основные системы, приходим к выводу, что первая (типа «консоль») дала решение гораздо более простое, чем основная система типа «шарнирно опертая балка». В случае равномерной нагрузки обычно получается наоборот.

Теперь перейдем к расчетной схеме Рис. 2, з. Можно было бы воспользоваться прямой симметрией, но в данном случае проще такого приема избежать для получения функции моментов сразу и в явном виде. Постановка задачи после поворота к привычному расположению Рис. 7, а, основная система Рис. 3, б, эквивалентная система Рис. 7, б, состояние «F» Рис. 7, в, единичные эпюры Рис. 4, б-в, податливости (2), обобщенные перемещения для внешней нагрузки

$$\delta_{1F} = \frac{1}{6} q_1 l^3; \quad \delta_{2F} = -\frac{1}{8} q_1 l^4$$

Решение системы (4):

$$X_1 = \frac{1}{12} q_1 l^2; \quad X_2 = \frac{1}{2} q_1 l$$

Эпюры (хотя в них нет особой нужды) показаны на Рис. 7, з-е.

Функция моментов для расчетной схемы Рис. 2, з имеет вид

$$M'_x(z) = \frac{1}{2} q_1 \left(-z^2 + lz - \frac{1}{6} l^2 \right)$$

Будучи сложенной с функцией моментов для гидростатической нагрузки (5), эта функция дает окончательное решение задачи.

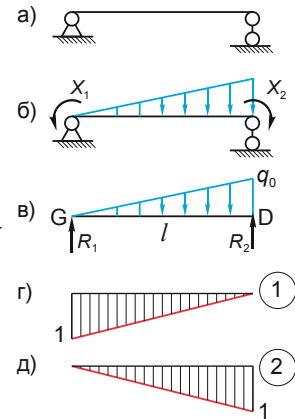


Рис. 6

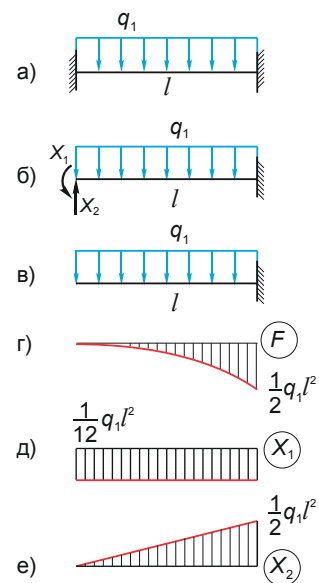


Рис. 7