

## Косая геометрическая симметрия

Различные виды симметрии (в переводе с греческого «соразмерность»), от простейших до самых сложных, широко встречаются в природе и в технике, создатели которой природу копируют, иногда неосознанно. Одно перечисление этих видов с примерами займет слишком много места. Поэтому мы рассмотрим только прямую (она же зеркальная или билатеральная) симметрию, и косую (антисимметрию или обратную симметрию).

Почти все живые организмы (млекопитающие, рыбы, птицы, насекомые и т. д.) обладают прямой симметрией. Поворотная (симметрия вращения, лучевая или радиальная) встречается в основном в мире флоры (Рис. 1).



Рис. 1

Косая симметрия в живой природе, судя по всему, не встречается вовсе. Тем не менее, примеры в жизни и технике найти можно.

Рассмотрим строй солдат (Рис. 2). Пренебрегая индивидуальными особенностями людей и полагая число колонн и шеренг бесконечным, можно утверждать, что относительно вертикальной плоскости, проходящей вдоль колонн и либо между солдатами, либо через ось симметрии любого из них, строй имеет прямую симметрию. Более того, построив вертикальную плоскость вдоль шеренг, мы получим плоскость косой симметрии. При зеркальном отображении строй развернется в обратную сторону как единое целое. Теперь, если дать команду «Кругом!», мы получим исходный строй – это и есть признак косой симметрии.



Рис. 2

При выполнении этой команды, то есть при зеркальном отражении относительно другой плоскости (вообще говоря, любой, но единой для всех), объект «меняет знак». Иными словами, группа объектов обладает косой симметрией, если при зеркальном отображении всей группы и при другом единообразном зеркальном отображении каждого объекта группа переходит сама в себя.



Рис. 3

На Рис. 3 показаны примеры изделий, обладающих косой симметрией.

В кириллическом и латинском алфавитах тоже можно встретить примеры как прямой, так и косой симметрий. Большинство букв обладает первой (например, латинские D, W, Y, кириллические Д, П, Э). Ряд букв обоих алфавитов обладает двумя осями прямой симметрии (Н, О, Х, Ж). Косую

симметрию в латинской азбуке имеют буквы S, N, Z. Кириллица, кроме буквы И, таковых не содержит.

В обоих алфавитах можно найти взаимную симметрию букв, не обладающих никакой собственной симметрией. Например, латинская буква R и кириллическая Я зеркально симметричны друг другу относительно вертикальной, а латинские P и L и соответственно кириллические Б и Г – горизонтальной осей.

Еще латинский алфавит предоставил наглядную иллюстрацию обоих видов симметрии (Рис. 4). Буквы, стоящие в одном столбце или одной строке, прямо симметричны. При этом буквы, стоящие по диагонали, переходят друг в друга при косоосимметричном отображении, то есть при двукратном зеркальном отображении относительно перпендикулярных осей.

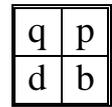


Рис. 4

Переходим к косоугольной геометрической симметрии расчётных схем строительной механики. В случае косоугольной упругой (то есть относящейся к силовым факторам) симметрии необходимо зеркально отобразить силовой фактор относительно оси и поменять его знак (или сделать это в обратной последовательности). Поменять знак силы – значит, направить её вектор в противоположную сторону. То же относится и к моменту, поскольку его можно мыслить и как векторную (точнее, псевдовекторную) величину. Но проще сменить направление момента на противоположное относительно хода часовой стрелки.

Но когда речь заходит о косоугольной геометрической симметрии (то есть симметрии расчётной схемы со связями, но без учета силовых факторов, или, грубо говоря, симметрии «железяки»), такой подход может вызвать трудности в понимании. Если с отражением относительно оси всё ясно, то как можно поменять знак стержня? Разве бывают положительные и отрицательные балки? Может ли, к примеру, шарнир иметь знак минус?

Оказывается, может, если ввести систему координат и относиться к материальным элементам, расположенным в ней в том или ином квадранте, как к имеющим определённый знак относительно каждой оси.

Рассмотрим плоскую раму (Рис. 5). Нам предстоит доказать, что она имеет косоугольную геометрическую симметрию относительно точки A, причём сделать это всеми возможными способами.

Введем систему координат (Рис. 6, а), рассматривая лишь половину исходной расчётной схемы Рис. 5. Отражение в оси y, как в зеркале, приводит к Рис. 6, б. Теперь в выбранной системе координат получается, что стержень AB' является «нулевым» относительно оси y, а стержень B'C' – «отрицательным». Первый из них при смене «знака», разумеется, останется на месте, а второй станет «положительным», превратившись в стержень B'C'' (Рис. 6, в). Получена исходная расчётная схема Рис. 5.

Легко показать, что прямоугольная система координат может иметь любые направления осей, лишь бы начало отсчета располагалось в точке A (Рис. 7). Остальные точки также обозначены аналогично Рис. 6, в. Углы, указанные красными и синими дужками, равны друг другу на каждом из рисунков.

Кстати, те же самые рисунки могут быть использованы для иллюстрации второго способа отображения, который можно назвать «двойной зеркальной симметрией». В самом деле, начнём с уже пройденного этапа отражения относительно оси y Рис. 6, б, только теперь участок AB'C' целиком отразим в оси x, как в зеркале, получив тот же результат (Рис. 6, в). Очевидно, что если оба взаимно перпендикулярных «зеркала» повернуть на произвольный угол, в итоге ничего не изменится (Рис. 7).

Еще одним способом является поворотная, точнее, в данном случае π-поворотная симметрия, или, развернуто говоря, симметрия с вращением на 180°. Выбирая всё ту же точку A (что, вообще говоря, не обязательно) в качестве центра, надо либо повернуть на угол π одну часть расчётной схемы до совпадения с другой (Рис. 8), либо всю схему целиком до совпадения с самой собой.

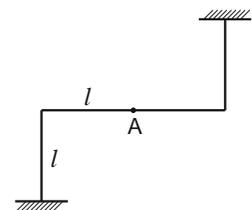


Рис. 5

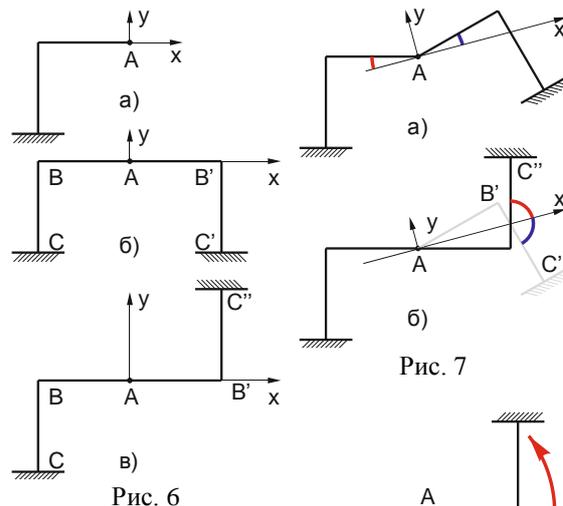


Рис. 6

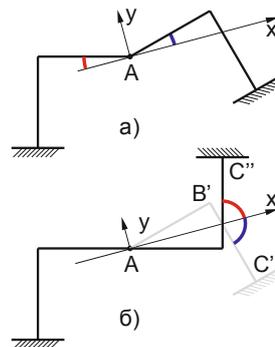


Рис. 7

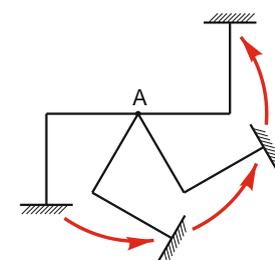


Рис. 8

И, наконец, четвертый способ отображения состоит в так называемой центральной симметрии, то есть симметрии относительно опять же любой точки, или, что самое удобное, точки А (Рис. 9).

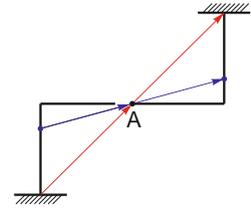


Рис. 9

Итак, подытожим. Имеются по меньшей мере четыре способа отобразить либо половину геометрически кососимметричной расчётной схемы (например, Рис. 5) до совпадения с другой половиной, либо всю её до совпадения с самой собой:

- 1) косая геометрическая;
- 2) двойная зеркальная;
- 3)  $\pi$ -поворотная;
- 4) центральная.

Может показаться, что первый из способов наименее удобен, поскольку требует непривычной и неестественной трактовки стержней и связей как объектов, имеющих знак. Однако называть подобную симметрию косою геометрической более верно и с точки зрения терминологии, и общности подхода ко всем видам симметрии вообще.

Действительно, есть классификация симметрии и по типам объектов (геометрическая и упругая), и по способу отображения (прямая и косая), причём они могут совмещаться в расчётной схеме в любой комбинации.

Например, на Рис. 10, а-в показана рама с прямой геометрической симметрией, а нагрузка имеет прямую (Рис. 10, а) или косую (Рис. 10, б) упругую симметрию. Задачи с косою геометрической симметрией и при этом с прямой и косою упругими будут разобраны ниже.

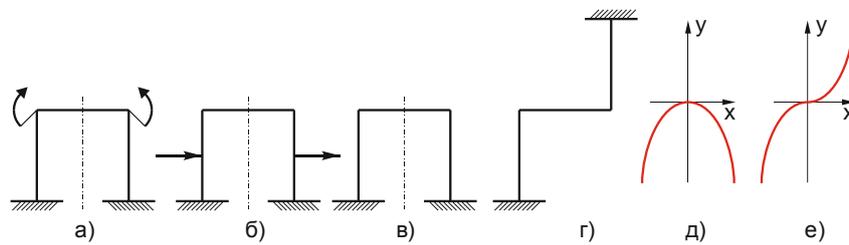


Рис. 10

Вторая причина преимущественного применения термина «косая геометрическая симметрия» состоит в непосредственной связи с математикой.

Все кинематические и все внутренние силовые факторы обладают либо прямой, либо косою упругой симметрией. При этом, например, осевое перемещение, будучи кососимметричным кинематическим фактором, связано с нормальной силой (симметричный силовой фактор) следующей зависимостью:

$$w = \int \frac{N dz}{EA},$$

а кососимметричная поперечная сила с симметричным изгибающим моментом – такой:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz},$$

что вполне естественно, если сравнить симметричные факторы с чётной функцией, а кососимметричные – с нечётной. Чётные и нечётные функции при дифференцировании и интегрировании переходят друг в друга.

То же можно сказать и о геометрической симметрии. Зеркально симметричная рама (Рис. 10, а) по очертаниям напоминает график квадратичной параболы (Рис. 10, д) как чётной функции, а кососимметричная рама (Рис. 10, б) подобна графику кубической параболы (Рис. 10, е), являющейся функцией нечётной.

Итак, рассмотрим раму, имеющую косую геометрическую симметрию (Рис. 5). При этом нагрузка является симметричной в упругом смысле (Рис. 11, а). Чтобы в этом убедиться, можно отобразить, например, нижнюю (левую) часть момента любым из описанных способов и непосредственно, без смены знака, получить верхнюю (правую) его часть.

Рама, закреплённая двумя заделками и не имеющая замкнутых контуров и врезанных шарниров, трижды статически неопределима. Основную систему проще всего взять, разрезав раму в точке А и отбросив три внутренних связи (Рис. 11, б). Канонические уравнения метода сил как часть эквивалентной системы (Рис. 11, в) имеют вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Перемножая полученные эпюры целиком и опуская жёсткость, находим обобщённые перемещения:

$$\delta_{11} = \frac{2}{3}l^3; \quad \delta_{12} = -l^3; \quad \delta_{22} = \frac{8}{3}l^3; \quad \delta_{33} = 4l \quad (2)$$

$$\delta_{1F} = \frac{1}{2}Ml^2; \quad \delta_{2F} = -\frac{3}{2}Ml^2 \quad (3)$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{3F} = 0 \quad (4)$$

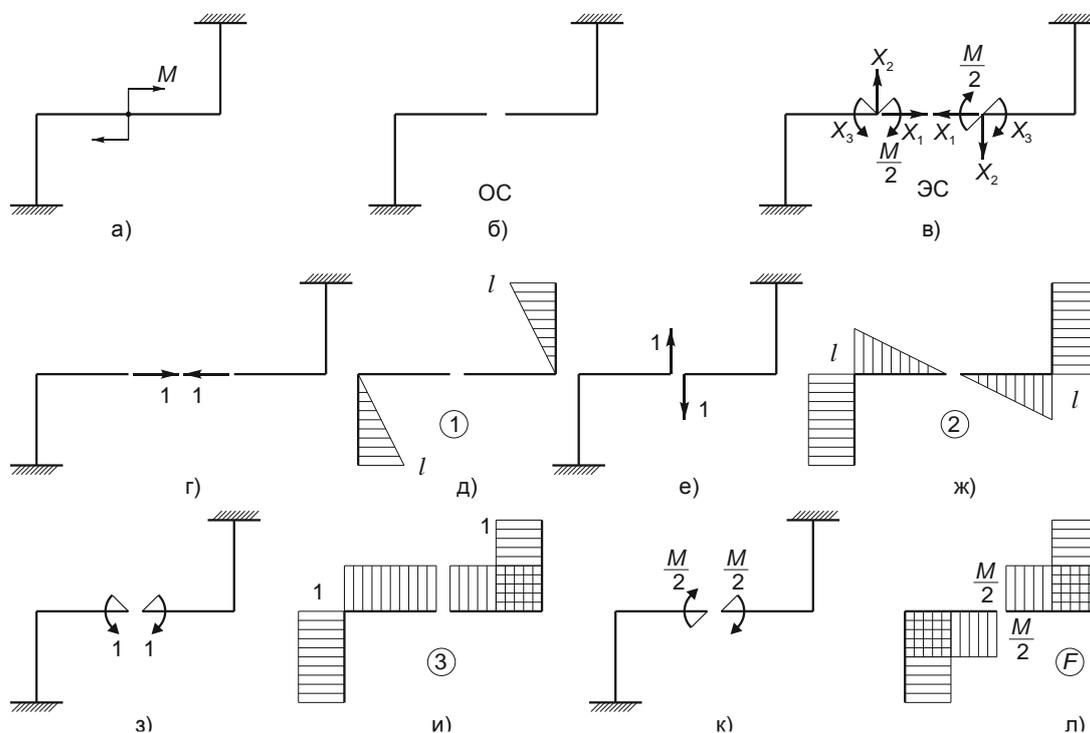


Рис. 11

После подстановки коэффициентов система (1) получает вид

$$\begin{cases} \frac{2}{3}l^3X_1 - l^3X_2 + \frac{1}{2}Ml^2 = 0 \\ -l^3X_1 + \frac{8}{3}l^3X_2 - \frac{3}{2}Ml^2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$4l \cdot X_3 = 0 \quad (6)$$

Из уравнения (6) следует  $X_3 = 0$ .

Рассмотрим подробнее неизвестные силовые факторы в эквивалентной системе (Рис. 12). Если, допустим, отобразить левую нормальную силу  $X_1$  относительно вертикальной оси, она перейдет в правую. Но теперь необходимо поменять её знак, но не в векторном, а в геометрическом смысле, то есть из четвёртого квадранта перенести в первый (или наоборот). Однако сила лежит на оси  $x$  (система координат показана на Рис. 6), как раз на границе I и IV квадрантов, и поэтому не изменится. Знак её (уже в векторном смысле) при этом менять не нужно. Значит, нормальная сила обладает прямой геометрической (и, напомним, прямой упругой) симметрией. Данная система несёт упруго-симметричную нагрузку, поэтому нормальная сила в сечении косоугольной геометрической симметрии в общем случае отлична от нуля. Поперечная сила  $X_2$  с одной, пусть тоже левой, стороны от сечения, будучи дважды отражённой в зеркале относительно вертикальной и горизонтальной осей, перейдет в силу  $X_2$  с правой стороны, и вновь без смены знака. То есть, поперечная сила имеет свойства прямой геометрической и косоугольной упругой симметрий.

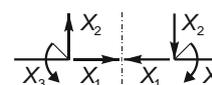


Рис. 12

Повернув опять же левый момент  $X_3$ , направленный против часовой стрелки, относительно центра на угол  $\pi$ , мы получим момент справа, направленный, разумеется, в ту же сторону – против часовой. А момент, находившийся справа от сечения изначально, имеет противоположное направление – по часовой. Значит, изгибающий момент обладает косоугольной геометрической (и прямой упругой) симметрией и в геометрически косоугольной задаче с прямой упругой симметрией неизбежно обнуляется. Таким образом, система канонических уравнений (1) третьего порядка распалась на уравнение (6), имеющее тривиальное решение, и систему второго порядка (5).

Её решение таково:

$$X_1 = \frac{3M}{14l}; \quad X_2 = \frac{9M}{14l}$$

Суммарная эпюра показана на Рис. 13, упругая ось – на Рис. 14. Нетрудно видеть, что и для эпюры, и для упругой оси справедлива все та же закономерность – отобразив одну её часть любым из четырех описанных способов, мы непосредственно получим другую часть.

Доказать качественно равенство нулю некоторых обобщённых перемещений можно и графически (Рис. 15). Рассмотрим для примера расчётную схему единичной нагрузки Рис. 15, а, идентичную Рис. 11, з. Изогнутая ось, соответствующая данной расчётной схеме, показана на Рис. 15, б. Обобщённое перемещение  $\delta_{31}$ , равное взаимному углу поворота сечений А и А' под действием единичной нагрузки Рис. 15, а, очевидно, равно нулю, что соответствует формуле (4). Обнуление остальных перемещений иллюстрируется аналогично.

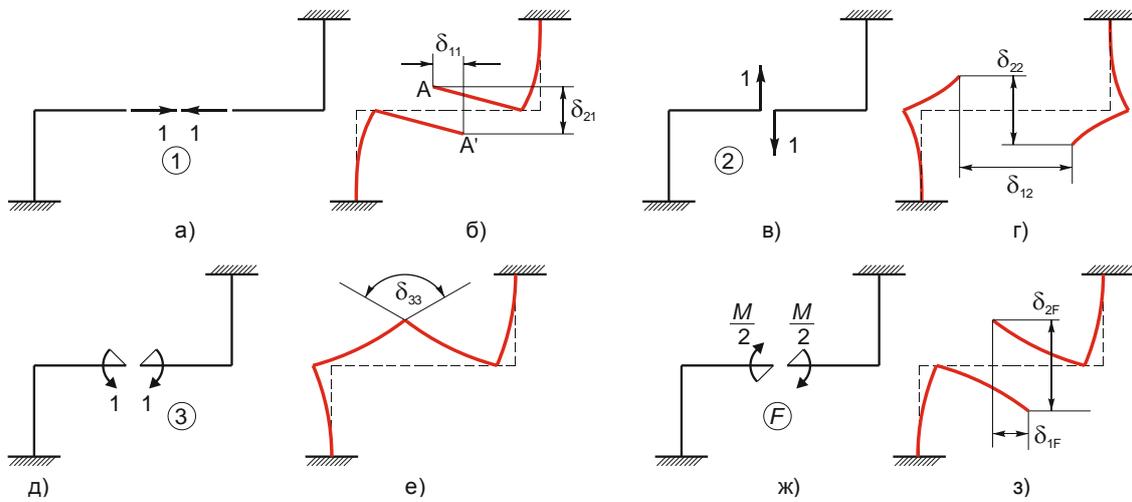
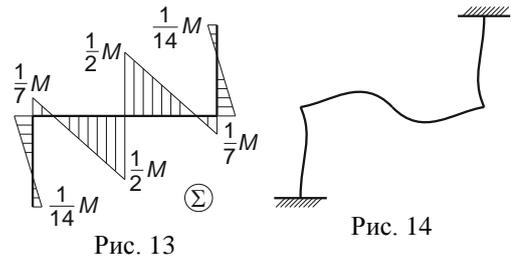


Рис. 15

Теперь рассмотрим задачу Рис. 16, а. Если отобразить левую силу  $F$  относительно центра, то она совпадет с правой силой, но будет иметь противоположное направление. Чтобы силы совпали, придётся поменять её знак. А смена знака и при упругой, и при геометрической симметрии говорит о том, что симметрия в данном случае – косая. То есть данная задача обладает двумя косыми симметриями.

Степень статической неопределимости, разумеется, осталась той же – три. Основная

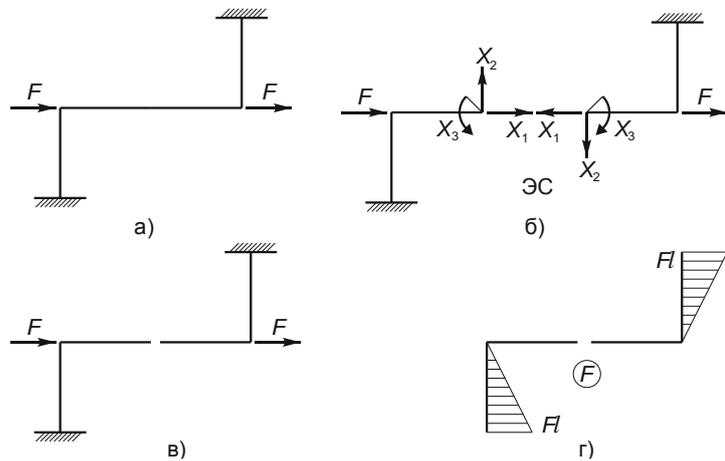


Рис. 16

система имеет неизменный вид (Рис. 11, б). Эквивалентная система показана на Рис. 16, б. Расчётные схемы единичных сил (Рис. 11, з, е, з) и соответствующие единичные эпюры (Рис. 11, д, ж, и) тоже будут теми же самыми. Расчётная схема и эпюра внешних сил изображены на Рис. 16, в, г соответственно. Не поменяются и обобщённые перемещения (2), а вместо (3) и (4) получим

$$\delta_{3F} = -Fl; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{1F} = \delta_{2F} = 0 \quad (7)$$

с учетом чего канонические уравнения (1) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{2}{3}l^3 X_1 - l^3 X_2 = 0 \\ -l^3 X_1 + \frac{8}{3}l^3 X_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$4l \cdot X_3 - Fl = 0 \quad (9)$$

Из системы (8) легко увидеть, что  $X_2 = X_1 = 0$ , а из уравнения (9) следует  $X_3 = \frac{1}{4}F$ .

То есть всё получилось строго обратно задаче с косой геометрической и прямой упругой симметриями, где обнулится момент, а силы приобрели ненулевые значения.

Кроме того, отметим, что грамотный, с учётом симметрии, выбор основной системы позволил в первом случае свести систему третьего порядка к системе второго, а в данной задаче вообще привел к одному линейному уравнению.

Суммарная эпюра данной задачи и изогнутая ось рамы показаны на Рис. 17.

Чтобы убедиться, что свойства двух косых симметрий – геометрической и упругой – присущи полученной эпюре, вначале повернём её левую часть на угол  $\pi$  относительно центра – получим эпюру, выделенную красным на Рис. 18.

Теперь остаётся поменять знак момента относительно оси – но не координатной, а оси стержня, то есть справа налево и наоборот, и то же – снизу вверх. Получим правую часть суммарной эпюры Рис. 17.

Аналогичную операцию можно проделать с изогнутой осью, после, например, двойного зеркального отображения меняя сжатые слои на растянутые той же кривизны, и наоборот.

Иллюстрация формул (7) через изогнутую ось показана на Рис. 19

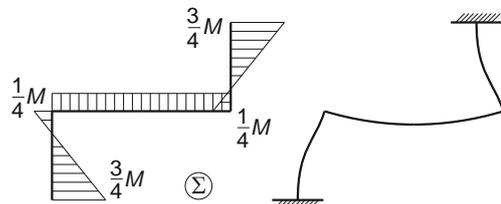


Рис. 17

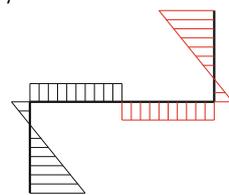


Рис. 18

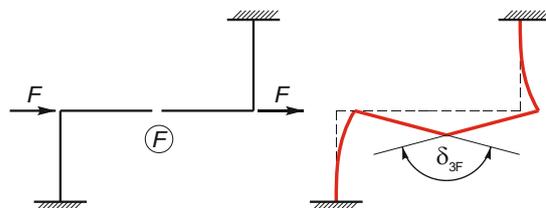


Рис. 19