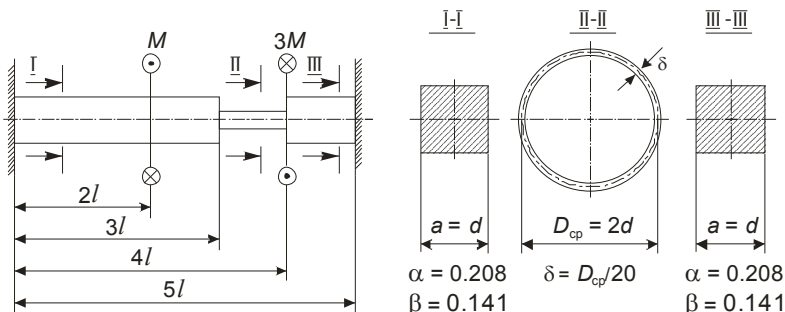


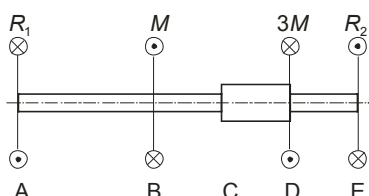
Статически неопределимый вал

- а) Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры моментов, напряжений и углов поворотов сечений;
- б) Подсчитать работу внешних моментов и потенциальную энергию деформации;
- в) Подобрать размеры поперечных сечений и вычислить максимальный угол поворота.

Параметры задачи: $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $l = 100 \text{ мм}$, $\tau_T = 200 \text{ МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $n_T = 2$.



Отбрасываем заделки, заменяя их реактивными моментами:



$\sum M(z) = R_1 - M + 3M - R_2 = 0$, откуда следует:

$$R_1 + 2M - R_2 = 0 \quad (1)$$

Получили 1 уравнение, 2 неизвестных (R_1, R_2) – задача единожды статически неопределима. Раскроем статическую неопределимость методом сечений.

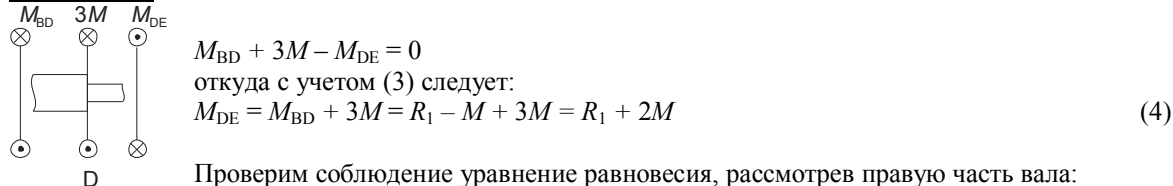
Участок AB:



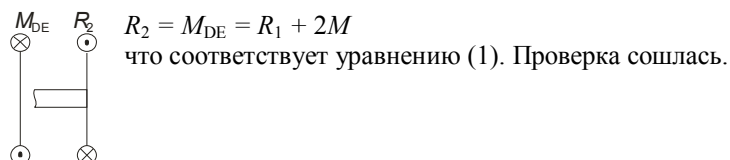
Участок BD:



Участок DE:



Проверим соблюдение уравнение равновесия, рассмотрев правую часть вала:



Найдем геометрические характеристики поперечных сечений:

Квадрат:

$$I_{K1} = I_{K3} = \beta a^4 = \beta d^4$$

$$W_{K1} = W_{K3} = \alpha a^3 = \alpha d^3$$

Тонкостенная труба:

$$I_{K2} = \frac{\pi D^3 \delta}{4} = \frac{\pi (2d)^3}{4} \cdot \frac{d}{10} = \frac{\pi \cdot 8d^3 \cdot d}{40} = \frac{\pi d^4}{5}$$

$$W_{K2} = \frac{\pi D^2 \delta}{2} = \frac{\pi (2d)^2}{2} \cdot \frac{d}{10} = \frac{\pi \cdot 4d^2 \cdot d}{20} = \frac{\pi d^3}{5}$$

Поскольку задача 1 раз статически неопределима, необходимо записать уравнение совместности перемещений. Условие совместности перемещений состоит в том, что сечения А и Е (заделки) не поворачиваются друг относительно друга. Тогда уравнение совместности перемещений имеет вид:

$$\varphi_{AE} = 0 = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = \frac{M_{AB} \cdot l_{AB}}{GI_{K1}} + \frac{M_{BC} \cdot l_{BC}}{GI_{K1}} + \frac{M_{CD} \cdot l_{CD}}{GI_{K2}} + \frac{M_{DE} \cdot l_{DE}}{GI_{K1}} =$$

$$= \frac{M_{AB} \cdot 2l}{GI_{K1}} + \frac{M_{BC} \cdot l}{GI_{K1}} + \frac{M_{CD} \cdot l}{GI_{K2}} + \frac{M_{DE} \cdot l}{GI_{K1}} = 0$$

Воспользовавшись формулами (2)...(4) и сокращая на отличный от нуля множитель $\frac{l}{Gd^4}$, получаем:

$$\frac{R_1 \cdot 2}{\beta} + \frac{R_1 - M}{\beta} + \frac{(R_1 - M) \cdot 5}{\pi} + \frac{R_1 + 2M}{\beta} = 0$$

откуда следует:

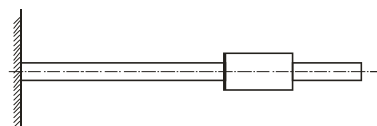
$$R_1 \left(\frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta} + \frac{5}{\pi} + \frac{1}{\beta} \right) = M \left(\frac{1}{\beta} + \frac{5}{\pi} - \frac{2}{\beta} \right)$$

$$R_1 = M \frac{-\frac{1}{\beta} + \frac{5}{\pi}}{\frac{4}{\beta} + \frac{5}{\pi}} \approx -0.183 \cdot M$$

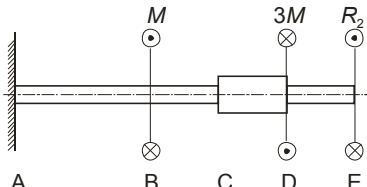
Из уравнения (1) имеем: $R_2 = R_1 + 2M = M(-0.183 + 2) = 1.816 \cdot M$

Проверим раскрытие статической неопределимости по принципу суперпозиции.

Основная система:



Эквивалентная система:



Условие совместности перемещений: сечение Е неподвижно относительно сечения А. Уравнение совместности перемещений:

$$\varphi_{EA} = -\frac{M \cdot l_{AB}}{G \cdot I_{K1}} + \frac{3M \cdot l_{AC}}{G \cdot I_{K1}} + \frac{3M \cdot l_{CD}}{G \cdot I_{K2}} - \frac{R_2 \cdot l_{AC}}{G \cdot I_{K1}} - \frac{R_2 \cdot l_{CD}}{G \cdot I_{K2}} - \frac{R_2 \cdot l_{DE}}{G \cdot I_{K1}} =$$

$$= -\frac{M \cdot 2l}{G \cdot I_{K1}} + \frac{3M \cdot 3l}{G \cdot I_{K1}} + \frac{3M \cdot l}{G \cdot I_{K2}} - \frac{R_2 \cdot 3l}{G \cdot I_{K1}} - \frac{R_2 \cdot l}{G \cdot I_{K2}} - \frac{R_2 \cdot l}{G \cdot I_{K1}} =$$

$$= \frac{l}{Gd^4} \left(-\frac{2M}{\beta} + \frac{9M}{\beta} + \frac{3M \cdot 5}{\pi} - \frac{3R_2}{\beta} - \frac{R_2 \cdot 5}{\pi} - \frac{R_2}{\beta} \right) = 0$$

Сокращая на множитель $\frac{l}{Gd^4}$, получаем:

$$M \left(-\frac{2}{\beta} + \frac{9}{\beta} + \frac{15}{\pi} \right) + R_2 \left(-\frac{3}{\beta} - \frac{5}{\pi} - \frac{1}{\beta} \right) = 0$$

$$R_2 = M \frac{\frac{7}{\beta} + \frac{15}{\pi}}{\frac{4}{\beta} + \frac{5}{\pi}} = 1.816 \cdot M$$

что соответствует результату, полученному методом сечений. Проверка сошлась. Согласно формулам (2)...(4) моменты по участкам равны

$$M_{AB} = R_1 = -0.183 \cdot M$$

$$M_{BD} = R_1 - M = -1.183 \cdot M$$

$$M_{DE} = R_1 + 2M = 1.816 \cdot M$$

Напряжения по участкам:

$$\tau_{AB} = \frac{M_{AB}}{W_{K1}} = -\frac{0.183 \cdot M}{\alpha d^3} = -0.88 \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{BD}}{W_{K1}} = -\frac{1.183 \cdot M}{\alpha d^3} = -5.707 \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{BD}}{W_{K2}} = -\frac{1.183 \cdot M \cdot 5}{\pi d^3} = -1.883 \frac{M}{d^3}$$

$$\tau_{DE} = \frac{M_{DE}}{W_{K1}} = \frac{1.816 \cdot M}{\alpha d^3} = 8.731 \frac{M}{d^3}$$

(5)

Выполним расчет на прочность:

$$\tau_{\max} = \tau_{DE} = 8.731 \frac{M}{d^3}$$

Условие прочности: $\tau_{\max} = \frac{\tau_T}{n_T} = 8.731 \frac{M}{d^3} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{8.731 \cdot M \cdot n_T}{\tau_T}} = 32.69 \text{ мм}$

Напряжения согласно формулам (5) равны:

$$\tau_{AB} = -0.88 \frac{M}{d^3} = -10.07 \text{ МПа}$$

$$\tau_{BC} = -5.707 \frac{M}{d^3} = -65.35 \text{ МПа}$$

$$\tau_{CD} = -1.883 \frac{M}{d^3} = -21.56 \text{ МПа}$$

$$\tau_{DE} = 8.731 \frac{M}{d^3} = 99.98 \text{ МПа}$$

Видно, что $\tau_{\max} = \frac{\tau_T}{n_T} \approx \tau_{DE}$. Погрешность составляет $0.02\% < 3\%$. Проверка сошлась.

Углы закручивания сечений равны:

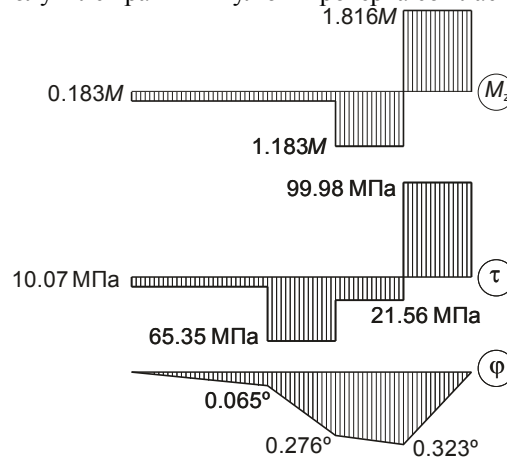
$$\varphi_B = \frac{M_{AB} \cdot l_{AB}}{G \cdot I_{K1}} = -\frac{0.183 \cdot M \cdot 2l}{G \cdot \beta d^4} = -0.065^\circ$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{BD} \cdot l_{BC}}{G \cdot I_{K1}} = -0.276^\circ$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{M_{BD} \cdot l_{CD}}{G \cdot I_{K2}} = -0.323^\circ$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{M_{DE} \cdot l_{DE}}{G \cdot I_{K1}} = 0$$

Угол закручивания заделки получился равным нулю – проверка сошлась. Строим эпюры:



Проведем энергетическую проверку. Работа внешних моментов равна:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 M_i \cdot \varphi_{Mi} = \frac{1}{2} (-M \cdot \varphi_B + 3M \cdot \varphi_D) = \frac{M}{2} (-0.065^\circ + 3 \cdot 0.323^\circ) = \frac{400 \cdot 10^3}{2} 0.904^\circ \frac{\pi}{180^\circ} =$$

$$= 3155.6 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 3.156 \text{ Дж}$$

Направление момента M , если смотреть со стороны сечения E – против часовой стрелки, а момента $3M$ – по часовой. Согласно эпюре φ оба угла закручивания сечений, где приложены моменты, направлены по часовой стрелке. Таким образом, момент M направлен против закручивания сечения своего приложения. Следовательно, работа этого момента отрицательна.

Потенциальная энергия деформации равна:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{M_{zi}^2 \cdot l_i}{G \cdot I_{Ki}} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}^2 \cdot l_{AB}}{G \cdot I_{K1}} + \frac{M_{BC}^2 \cdot l_{BC}}{G \cdot I_{K1}} + \frac{M_{CD}^2 \cdot l_{CD}}{G \cdot I_{K2}} + \frac{M_{DE}^2 \cdot l_{DE}}{G \cdot I_{K1}} \right) =$$

$$= \frac{M^2 \cdot l}{2Gd^4} \left[\frac{(-0.183)^2 \cdot 2}{\beta} + \frac{(-1.183)^2}{\beta} + \frac{(-1.183)^2 \cdot 5}{\pi} + \frac{1.816^2}{\beta} \right] = 3153.9 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 3.154 \text{ Дж}$$

Погрешность составляет $0.06\% < 3\%$. Считаем, что $U = W$. Проверка сошлась.

Результаты:

$$d = 32.69 \text{ мм};$$

$$\varphi_{\max} = 0.323^\circ;$$

$$U = W \approx 3.155 \text{ Дж}$$