Внецентренное растяжение-сжатие стержня с поперечным сечением в виде правильного многоугольника

Дана колонна, длина которой полагается существенно большей стороны a (Рис. 1). Необходимо изучить прочность конструкции.

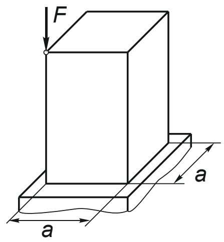

Рис. 1

На первый взгляд, задача является простейшей из задач на внецентренное растяжение-сжатие и косой изгиб. К расчётным схемам таких задач относятся те, где силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных осей. При этом, если осевая сила равна нулю, говорят про косой изгиб, а если отлична от нуля, то про внецентренное растяжение-сжатие, то есть суперпозицию косого изгиба и осевого нагружения.

Прежде всего, сделав вывод о том, что при соблюдении принципа Сен-Венана все сечения равноопасны, изобразим расчётную схему в двумерной постановке (Рис. 2). Затем перенесем силу в центр тяжести сечения и компенсируем перенос двумя изгибающими моментами, равными друг другу в силу симметрии:

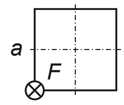

Рис. 2

$$M_x = M_y = F\frac{a}{2}$$

Моменты инерции также равны:

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

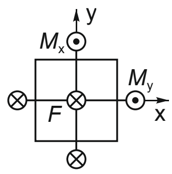

Рис. 3

Направления осей выбираем так, чтобы в первом квадранте ($x > 0$, $y > 0$) оба момента создавали растяжение (Рис. 3):

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x - \frac{F}{A} = F\frac{a}{2}\cdot\frac{12}{a^4}(x+y) - \frac{F}{a^2} = \frac{F}{a^2}\left(6\frac{x}{a} + 6\frac{y}{a} - 1\right) \qquad (1)$$

Чтобы построить нейтральную линию, положим $\sigma = 0$:

$$6\frac{x}{a} + 6\frac{y}{a} - 1 = 0$$

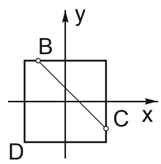

Рис. 4

Пусть $y = \frac{a}{2}$, тогда $x = -\frac{a}{3}$ (точка B на Рис. 4). Аналогично, при $x = \frac{a}{2}$ получаем $y = -\frac{a}{3}$ (точка C) и строим нейтральную линию BC.

Самая удалённая от неё точка сечения – точка D, в которой $x = y = -\frac{a}{2}$. Подставляя эти координаты в формулу (1), получаем напряжение в опасной точке

$$\sigma_{\max} == \frac{F}{a^2}(-3-3-1) = -7\frac{F}{a^2} \qquad (2)$$

Задача решена.

Однако её можно решить несколько проще и гораздо изящней. Для этого достаточно вспомнить, что у правильных многоугольников любая пара центральных осей является парой главных осей.

Следует такое утверждение из того, что, во-первых, в главных осях один из моментов инерции достигает максимума, а другой – минимума, а во-вторых, сумма осевых моментов инерции постоянна (и равна полярному моменту). Построим произвольную пару центральных осей u, v (Рис. 5). Очевидно, что эти оси одинаково расположены относительно фигуры и поэтому $I_u = I_v$. А поскольку $I_u + I_v = I_x + I_y = I_p$, то получается, что все центральные моменты инерции не только квадрата, но и любого правильного многоугольника равны друг другу и одновременно достигают и максимума, и минимума. Следовательно, оси u, v – главные.

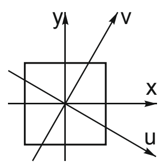

Рис. 5

Силовой линией в сечении является прямая OD (Рис. 6). Выберем ось x совпадающей с осью OD. Тогда можно вообще не говорить о внецентренном растяжении-сжатии, поскольку силовая линия совпадает с главной центральной осью. Поэтому задачу можно переквалифицировать на совместное действие прямого (а не косого) изгиба и осевого нагружения.

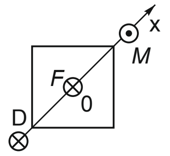

Рис. 6

В силу симметрии задачи относительно оси x ось y оказывается лишней.

То есть получается, что мы свели изначально трёхмерную задачу Рис. 1 вначале к плоской (Рис. 2-Рис. 5), а теперь и к одномерной (Рис. 6)!
Изгибающих моментов возникает не два, а один, равный произведению силы на плечо OD, то есть

$$M=\frac{\sqrt{2}}{2}Fa$$

Тогда уравнение, аналогичное (1), будет иметь более компактный вид

$$\sigma=\sigma_y+\sigma_z=\frac{M}{I_y}x-\frac{F}{A}=Fa\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12}{a^4}x-\frac{F}{a^2}=\frac{F}{a^2}\left(6\sqrt{2}\frac{x}{a}-1\right) \tag{3}$$

В опасной точке D $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$ и поэтому

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{a^2}\left[6\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right]=\frac{F}{a^2}(-6-1)=-7\frac{F}{a^2}$$

что соответствует результату (2).
Правда, построение нейтральной линии в новых осях (точнее, «в новой оси» x) требует вычисления хоть и одного числа, но более сложного в записи: из формулы (3) при $\sigma = 0$ следует

$$6\sqrt{2}\frac{x}{a}-1=0\rightarrow x=\frac{1}{6\sqrt{2}}a\approx 0.118\cdot a$$

Причём нейтральная линия в силу той же симметрии относительно оси x будет перпендикулярна ей, поэтому может строиться также по одной, а не по двум, точкам.
Однако построение нейтральной линии, как правило, требуется либо для наглядности, либо для сложных несимметричных сечений с целью поиска неочевидных опасных точек.