

## Выбор основной системы, оптимальной для расчета на жесткость

Начнем с простой задачи растяжения-сжатия колонны (Рис. 1, а). Требуется определить осевое перемещение сечения Н.

Вначале решим задачу традиционным способом. Отбросим связи, заменив их реакциями (Рис. 1, б), и запишем уравнение равновесия:

$$\Sigma(F_z) = -R_B - F + R_K = 0 \quad (1)$$

В одном уравнении две неизвестных реакции: задача единожды статически неопределима. Нормальная сила по участкам:

$$N_{BC} = R_B; N_{CD} = N_{DK} = N_{HK} = R_K = R_B + F$$

Условие совместности перемещений: удлинение колонны равно нулю. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \Delta l_{BK} &= \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{DK} = \frac{N_{BC}l}{2EA} + \frac{N_{CD}l}{2EA} + \frac{N_{DK}2l}{EA} = \\ &= \frac{R_B l}{2EA} + \frac{(R_B + F)l}{2EA} + \frac{(R_B + F)2l}{EA} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{R_B}{2} + \frac{R_B + F}{2} + 2(R_B + F) = 0 \rightarrow R_B \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \right) = -F \left( \frac{1}{2} + 2 \right) \rightarrow \\ &\rightarrow 3R_B = -\frac{5}{2}F \rightarrow R_B = -\frac{5}{6}F \end{aligned}$$

Тогда из формулы (1) получаем

$$R_K = R_B + F = -\frac{5}{6}F + F = \frac{1}{6}F \quad (2)$$

Строим эпюры нормальной силы и осевого перемещения: Рис. 1, в и г, соответственно. Из эпюры  $w$  следует, что искомое перемещение  $w_H$  по модулю равно  $\frac{1}{6} \frac{Fl}{EA}$ . Поскольку ось  $z$  по умолчанию направлялась слева направо, то отрицательное направление перемещения означает противоположное оси  $z$ , то есть влево. Задача решена.

Покажем, как достичь того же результата методом податливостей (методом сил). Как известно, следующим шагом после вычисления степени статической неопределимости (этот шаг уже пройден) является выбор основной системы (ОС). Наиболее очевидными ОС представляются ОС1 и ОС2 (Рис. 2, а и б). Произвольно выберем ОС1. Далее формируем эквивалентную систему ЭС1 (Рис. 2, в) и записываем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0 \quad (3)$$

Физический смысл обобщенных перемещений таков:  $\delta_{11}$  – перемещение сечения К вправо под действием единичной силы, приложенной в сечении К и направленной вправо;  $\delta_{1F}$  – перемещение сечения К вправо под действием внешних сил. Прикладываем их (Рис. 2, з) и строим эпюру  $N$  (Рис. 2, д), далее – единичную силу (Рис. 2, е) и ее эпюру (Рис. 2, ж). Ищем обобщенные перемещения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}(2l \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{2EA}(2l \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3l}{EA}; \quad \delta_{1F} = -\frac{F \cdot l \cdot 1}{2EA} \quad (4)$$

Тогда из формулы (3) следует  $X_1 = \frac{1}{6}F$ .

Как видно, правая реакция сошлась с формулой (2). Но как сделать требуемый расчет на жесткость? Существуют два пути. Оба они начинаются с приложения единичной силы в сечении Н (Рис. 2, з) и построения ее эпюры Рис. 2, и. Далее можно, во-первых, перемножить полученную эпюру на эпюру внешних сил (так называемую грузовую) Рис. 2, д и на единичную Рис. 2, ж, умноженную на найденную величину  $X_1$ , и сложить результаты по суперпозиции. Во вторых, можно построить суммарную эпюру и единичную перемножить уже на нее.

Чаще всего избирают второй путь, ведь все эпюры на Рис. 2 – фиктивные, зависящие от произвольного выбора ОС. Так что обычно суммарную эпюру нормальной силы строят, даже если это не входит в

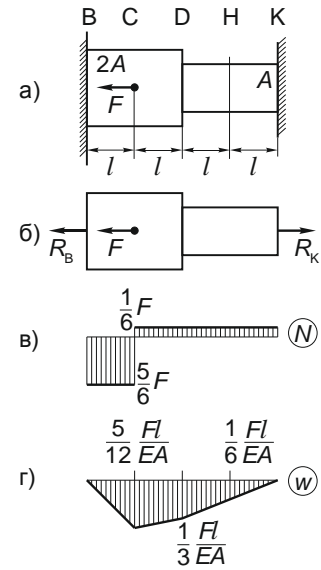


Рис. 1

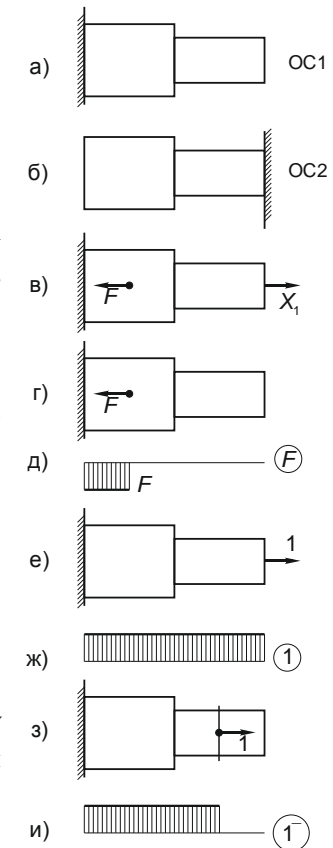


Рис. 2

постановку задачи. В любом случае достаточно трудоемкое построение эпюры  $w$ , если того не требует постановка задачи, не является необходимым.

Итак, суммарная эпюра получилась такой же – Рис. 1, *в*. Теперь выполняем расчет на жесткость:

$$w_H^- = -\frac{5}{6} \frac{F \cdot l \cdot 1}{2EA} + \frac{1}{6} \frac{F \cdot l \cdot 1}{2EA} + \frac{1}{6} \frac{F \cdot l \cdot 1}{EA} = \frac{Fl}{EA} \left( -\frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{6} \frac{Fl}{EA} \quad (5)$$

Знак минус говорит о том, что направление перемещения противоположно единичной силе, то есть происходит влево. Ответ сошелся и по модулю, и по направлению.

Однако задачу можно решить еще проще! Следует вспомнить о том, что для получения ОС от исходной  $n$  раз статически неопределимой конструкции нужно отбрасывать  $n$  связей, но не обязательно внешних. В задачах растяжения-сжатия любые два соседних сечения могут перемещаться (но не перемещаются!) друг относительно друга только в осевом направлении, то есть между ними есть внутренняя связь, «реакция» которой – нормальная сила. Слово «реакция» взято в кавычки, поскольку выражение «реакция внутренней связи» обычно заменяется на полностью эквивалентное «внутренний силовой фактор».

Итак, отбросим не внешнюю, а внутреннюю связь, причем среди бесконечного множества сечений выберем именно то, где требуется найти перемещение – Рис. 3, *а*. Показанное обозначение в сечении Н говорит о том, что сечения слева от Н (назовем его Н<sup>-</sup>) и справа (Н<sup>+</sup>) в рамках выбранной ОСЗ могут свободно перемещаться друг относительно друга в осевом направлении. ЭСЗ имеет вид Рис. 3, *б*, причем направление  $X_1$  (растягивающее) выбирается на основании предыдущих решений – отрицательное значение  $X_1$  будет говорить об ошибке.

В каноническом уравнении (3) теперь  $\delta_{11}$  – взаимное (или относительное) перемещение сечений Н<sup>-</sup> и Н<sup>+</sup> (точнее, их сближение) под действием единичных сил, приложенных как показано на Рис. 3, *в*;  $\delta_{1F}$  – сближение сечений Н<sup>-</sup> и Н<sup>+</sup> под действием внешних сил.

Приступая к построению грузовой эпюры, нетрудно заметить, что она уже построена – Рис. 2, *д*. Кроме того, построена и эпюра от единичной силы в сечении Н<sup>-</sup> – Рис. 2, *и*. Что же касается силы в сечении Н<sup>+</sup>, то ее эпюра показана на Рис. 3, *з*. Будучи построенными вместе (или, что то же самое, сложенными), они образуют эпюру Рис. 2, *ж*.

Поэтому очевидно, что обобщенные перемещения в ОСЗ будут теми же, что и в ОС1, а именно (4). Иначе и быть не могло – нормальная сила в сечениях Н и К одна и та же. Кроме того, как и ожидалось,  $X_1 > 0$ .

Казалось бы, мы ничего не выгадали, заменив ОС1 на ОСЗ – и эпюры, и коэффициенты полностью совпадают. Для раскрытия статической неопределимости – да, разницы никакой. Но для расчета на жесткость ОСЗ гораздо удобнее. Оказывается, что, во-первых, искомое перемещение можно найти двумя способами в рамках одной ОСЗ, проведя таким образом проверку. Во-вторых, для заданного расчета на жесткость нет нужды отдельно прикладывать единичную силу в интересующем нас сечении и строить эпюру – она уже построена на этапе раскрытия статической неопределимости.

Поясним сказанное. Представим, что единичная сила к ОСЗ приложена только в сечении Н<sup>-</sup>, а в сечении Н<sup>+</sup> не приложено ничего. Перемножив полученную эпюру Рис. 2, *и*, на суммарную, мы найдем перемещение сечения Н<sup>-</sup> вправо. Такое действие мы уже выполнили и получили результат (5). Теперь уберем силу в сечении Н<sup>-</sup> и приложим ее в сечении Н<sup>+</sup> (влево) – получим эпюру Рис. 3, *з*. Умножая ее на суммарную, имеем

$$w_H^+ = \frac{1}{6} \frac{F \cdot l \cdot 1}{EA} \quad (6)$$

Знак плюс говорит о том, что выбранное направление силы (влево) соответствует действительности. Кроме того, легко заметить, что расчет по формуле (6) получился существенно проще, чем по формуле (5).

Если же теперь приложить обе единичные силы, как показано на Рис. 3, *в*, и умножить эпюру Рис. 2, *ж*, на суммарную, то из формул (5) и (6) получаем:

$$w_H^- + w_H^+ = 0$$

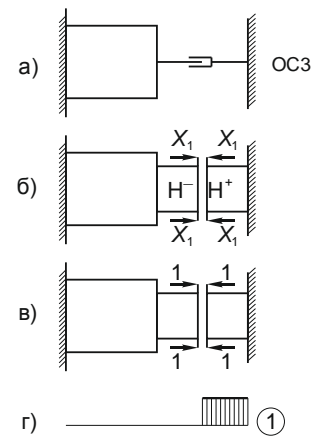


Рис. 3

Физический смысл нулевого результата состоит в том, что на самом деле сечения  $H^-$  и  $H^+$  составляют единое целое и относительно друг друга не перемещаются. Иными словами, проведена «единичная проверка» или «проверка перемножением».

Перейдем к более сложным задачам.

В единожды статически неопределимой балке Рис. 4, а, требуется найти вертикальное перемещение сечения В. Для подобных конструкций существует богатый выбор основных систем, некоторые из которых показаны на Рис. 4, б, и у каждой из них найдутся положительные качества. Однако мы рассмотрим еще одну ОС1 – Рис. 4, в. В сечении В отброшена внутренняя связь (поперечная сила), запрещающая взаимное вертикальное перемещение сечений справа и слева от В.

Таким образом, обобщенные перемещения в уравнении (3) приобретают следующий смысл:  $\delta_{11}$  – взаимное вертикальное перемещение сечений  $B^-$  и  $B^+$  под действием единичных сил, показанных на Рис. 4, ж;  $\delta_{1F}$  – взаимное вертикальное перемещение сечений  $B^-$  и  $B^+$  под действием внешних сил.

Сперва построим грузовую эпюру, отбросив связи и заменяя их реакциями Рис. 4, д. Из суммы на вертикаль сил справа от сечения В следует:

$$R_2 = F \rightarrow R_1 = 0$$

$$\Sigma M_C = R_3 - Fl = 0 \rightarrow R_3 = Fl$$

Грузовая эпюра показана на Рис. 4, е. Аналогично строим эпюру от двух единичных сил – Рис. 4, и.

Раскрываем статическую неопределимость:

$$\delta_{11} = 9l^3; \quad \delta_{1F} = -\frac{13}{3}Fl^3 \rightarrow X_1 = \frac{13}{27}F \quad (7)$$

Изгибная жесткость здесь и далее опущена. Строим суммарную эпюру – Рис. 4, к. Для дальнейших выкладок нам потребуется ордината эпюры моментов в точке В – она равна  $\frac{1}{27}Fl$ .

Приложив к ОС1 только левую силу из показанных на Рис. 4, ж, и, построив эпюру «1<sup>-</sup>» (Рис. 4, л), перемножаем ее на суммарную эпюру:

$$EI_x v_B^- = \frac{l}{6} \cdot l \left( 2 \cdot \frac{4}{9} Fl - \frac{1}{27} Fl \right) = \frac{23}{162} Fl^3$$

Поскольку единичная сила была направлена вниз, а результат получился положительным, то сечение В переместится вниз.

Теперь приложим только правую силу (вверх), построим эпюру «1<sup>+</sup>» Рис. 4, м, и перемножим ее на суммарную:

$$\begin{aligned} EI_x v_B^+ &= \frac{1}{2} \left( \frac{4}{9} Fl - \frac{1}{27} Fl \right) l \cdot 2l - \frac{l}{6} \left( \frac{1}{27} Fl \cdot 5l + \frac{14}{27} Fl \cdot 4l \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{27} Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = Fl^3 \left( \frac{12-1}{27} - \frac{5+14 \cdot 4}{6 \cdot 27} - \frac{14}{3 \cdot 27} \right) = \\ &= \frac{Fl^3}{27} \frac{11 \cdot 6 - 5 - 56 - 14 \cdot 2}{6} = \frac{Fl^3}{162} (66 - 61 - 28) = -\frac{23}{162} Fl^3 \end{aligned}$$

То есть  $v_B^- + v_B^+ = 0$ : проверка сошлась. Еще одна проверка: эпюра «1» есть сумма эпюр «1<sup>-</sup>» и «1<sup>+</sup>». Для пущей уверенности можно перемножить суммарную эпюру на общую единичную и вновь получить нуль.

Но решение подвергается дальнейшему упрощению: эпюру «1» можно не строить вовсе – отдельных единичных эпюр «1<sup>-</sup>» и «1<sup>+</sup>» вполне достаточно и для раскрытия статической неопределимости, и для расчета на жесткость, и для проверки. Вычислять коэффициенты  $\delta_{11}$  и  $\delta_{1F}$  тоже не обязательно.

В самом деле, обозначая косым крестиком в кружочке перемножение эпюр по Мору  $a \otimes b = \int a \cdot b \cdot dz$ , имеем:

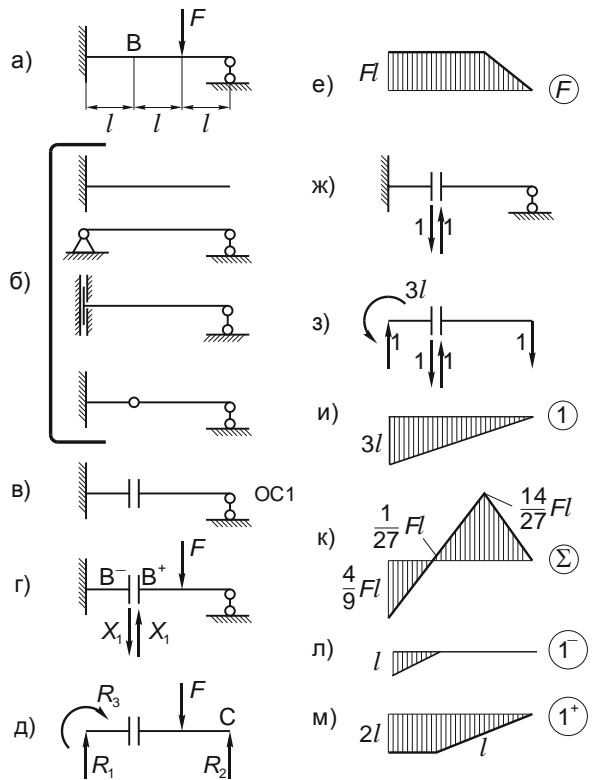


Рис. 4

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{M_F \otimes M_1}{M_1 \otimes M_1} = -\frac{M_F \otimes (M_1^- + M_1^+)}{(M_1^- + M_1^+) \otimes (M_1^- + M_1^+)} = \\
&= -\frac{M_F \otimes M_1^- + M_F \otimes M_1^+}{M_1^- \otimes M_1^- + 2(M_1^- \otimes M_1^+) + M_1^+ \otimes M_1^+} = -\frac{\delta_{1F}^- + \delta_{1F}^+}{\delta_{11}^- + 2\delta_{11}^\pm + \delta_{11}^+}
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь под  $M_1^-$  и  $M_1^+$  понимаются функции, отраженные единичными эпюрами «1<sup>-</sup>» и «1<sup>+</sup>», соответственно.

$$\delta_{1F}^- = M_F \otimes M_1^- = -\frac{1}{2}l \cdot l \cdot Fl = -\frac{1}{2}Fl^3$$

$$\delta_{1F}^+ = M_F \otimes M_1^+ = -\left[ Fl \cdot l \cdot 2l + \frac{1}{2}(2l+l)l \cdot Fl + \frac{1}{2}Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3}l \right] = -Fl^3 \left( 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) = -Fl^3 \frac{12+9+2}{6} = -\frac{23}{6}Fl^3$$

$$\delta_{11}^- = M_1^- \otimes M_1^- = \frac{1}{3}l^3; \quad \delta_{11}^\pm = M_1^- \otimes M_1^+ = \frac{1}{2}l^2 \cdot 2l = l^3;$$

$$\delta_{11}^+ = M_1^+ \otimes M_1^+ = 2l \cdot l \cdot 2l + \frac{1}{2}2l \cdot 2l \cdot \frac{2}{3}2l = l^3 \left( 4 + \frac{8}{3} \right) = \frac{20}{3}l^3$$

Таким образом, из (8) следует:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{1}{2}Fl^3 - \frac{23}{6}Fl^3}{\frac{1}{3}l^3 + 2 \cdot l^3 + \frac{20}{3}l^3} = -\frac{-\frac{13}{3}Fl^3}{9l^3}$$

Полученный результат полностью соответствует формуле (7). Но пользоваться формулой (8) удобно для сложных задач, к каковым данная не относится. Кроме того, эту формулу можно рассматривать как еще один способ проверки, хотя тоже не слишком надежный.

Обычно для решения единой статически неопределимых задач требуются пять эпюр: грузовая, единичная,  $X_1$ , суммарная и еще одна единичная для расчета на жесткость. У нас получилось четыре – избавились от последней из перечисленных.

Что касается количества расчетов, то оно, возможно, и увеличилось, однако сами расчеты стали гораздо проще. Эпюры (которых стало меньше) тоже упрощаются, потому что эпюра от двух внешних силовых факторов (во втором случае от двух сил) обычно сложнее эпюры от одного фактора.

Третий пример посвящен неразрезной балке Рис. 5, а. Найти нужно угол поворота сечения С. Интересно будет выяснить, насколько решение традиционной для неразрезных балок ОС с врезанным над опорой шарниром (но не само по себе, а с последующим расчетом на жесткость) проще решения по ОС, приспособленной именно для такого расчета.

Сперва решим задачу обычным методом Рис. 5, б-е:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2}2l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2}l \cdot \frac{2}{3} = l; \quad \delta_{1F} = -\frac{1}{2}Ml \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}Ml \rightarrow X_1 = \frac{1}{6}M$$

Расчет на жесткость Рис. 5, ж-з:

$$\begin{aligned}
EI_x \theta_C &= -\frac{1}{2}l \cdot \frac{1}{12}M \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{l}{6} \cdot \frac{1}{2} \left( 2 \cdot \frac{1}{12}M + \frac{1}{6}M \right) = Ml \left( -\frac{1}{72} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \right) = \\
&= \frac{1}{72}Ml(-1+2) = \frac{1}{72}Ml
\end{aligned}$$

То есть  $\theta_C = \frac{1}{72} \frac{Ml}{EI_x}$  (против часовой стрелки). Задача решена.

Обозначив через  $\theta_{DD}$  взаимный угол поворота сечений слева и справа от сечения D, проведем проверку перемножением:

$$EI_x \theta_{DD} = \frac{1}{2}2l \cdot \frac{1}{6}M \cdot \frac{2}{3} + \frac{l}{6} \left( 2 \cdot \frac{1}{6}M - M \right) = Ml \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right) = 0 \tag{9}$$

Несколько подробнее остановимся на расчете предлагаемым методом. ОС2 Рис. 6, а, ЭС2 Рис. 6, б. Грузовая эпюра имеет тот же вид Рис. 5, д. Единичное состояние Рис. 6, в, и его эпюра Рис. 6, з.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2}2l \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}2 + \frac{1}{2}l \cdot 2 \cdot \frac{2}{3}2 = \frac{8}{3}l + \frac{4}{3}l = 4l; \quad \delta_{1F} = -\frac{1}{2}Ml \cdot \frac{1}{3}2 = -\frac{1}{3}Ml \rightarrow X_1 = \frac{1}{12}M$$

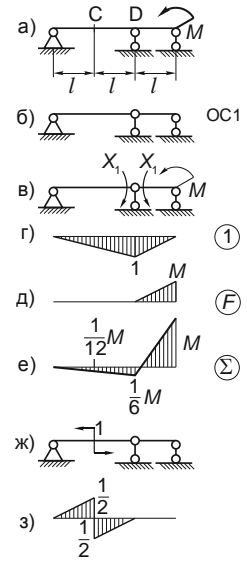


Рис. 5

Момент в сечении С получился таким же, как решении по ОС1: совпадают и знак (сжаты нижние слои) и модуль. Проверка сошлась.

Строим суммарную эпюру Рис. 5, е, и переходим к расчету на жесткость: прикладываем слева от сечения С единичный момент Рис. 6, д, строим эпюру «1<sup>-</sup>» Рис. 6, е, и перемножаем:

$$EI_x \theta_C^- = \frac{1}{2} l \frac{1}{12} M \frac{2}{3} + \frac{l}{6} \left( 2 \frac{1}{6} M + \frac{1}{12} M \right) + \frac{l}{6} \left( 2 \frac{1}{6} M - M \right) = MI \left( \frac{1}{36} + \frac{4+1}{6 \cdot 12} - \frac{1}{9} \right) = MI \frac{2+5-8}{72} = -\frac{1}{72} MI$$

Единичный момент слева от сечения С имел направление по часовой стрелке, значит, его истинное направление противоположно. Ответ получен. Еще одна проверка сошлась.

Вновь, казалось бы, никаких выгод мы не получили: те же четыре эпюры по каждой из ОС. Однако, если получать решение по ОС1, то как его проверить? Применять ОС с отброшенным шарниром весьма неразумно – расчет получится существенно более громоздким. Единственным выходом кажется проверка перемножением (9), но она известна невысокой надежностью.

Зато при решении по ОС2 можно провести несложную и при этом весьма убедительную проверку, приложив момент справа от С (Рис. 6, ж), построив эпюру «1<sup>+</sup>» (Рис. 6, з) и перемножив ее на суммарную:

$$EI_x \theta_C^+ = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6} M + \frac{1}{12} M \right) l + \frac{l}{6} \left( 2 \frac{1}{6} M - M \right) = MI \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{72} MI$$

Получается, что решение по ОС с шарниром, врезанным в сечении, угол поворота которого требуется определить, по сложности сопоставимо с решением по ОС с шарниром, врезанным над опорой. Кроме того, второе решение для неразрезных балок дает сразу несколько вполне надежных проверок.

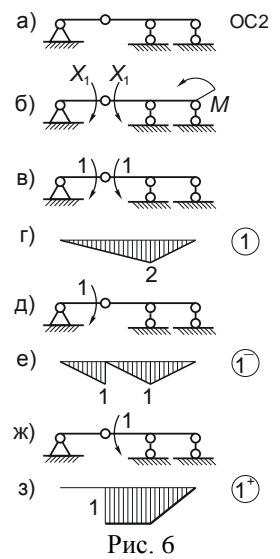


Рис. 6

В качестве четвертого примера рассмотрим плоскую раму Рис. 7, а. Требуется найти угол поворота узла С. Из постановки задачи следует выбор оптимальной (не вообще, а именно для данной постановки!) ОС – Рис. 7, б. Дальнейшие построения и выкладки очевидны и пояснений не требуют:

$$\delta_{1F} = -\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} Fl \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} Fl^2; \quad \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} = l \rightarrow X_1 = \frac{1}{4} Fl$$

После построения суммарной эпюры Рис. 7, з, перемножим ее горизонтальную часть на единичную эпюру и получим:

$$EI_x \theta_C^- = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{l}{6} \left[ -\frac{3}{8} Fl \left( 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{1}{4} Fl \left( 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \right) \right] = Fl^2 \left[ -\frac{1}{16} + \frac{1}{6} \left( -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} \right) \right] = Fl^2 \left( -\frac{1}{16} - \frac{1}{48} \right) = -\frac{3+1}{48} Fl^2 = -\frac{1}{12} Fl^2$$

Левый (верхний) момент был направлен по часовой стрелке, результат получился отрицательным, значит, сечение С повернется против часовой стрелки на угол

$$\theta_C^- = \frac{1}{12} \cdot \frac{Fl^2}{EI_x}$$

По сути дела, задача решена. Однако мы проведем проверку, умножив вертикальную часть суммарной эпюры на единичную:  $EI_x \theta_C^+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12} Fl^2$ . Проверка сошлась.

Подводя итоги рассмотренных единожды статически неопределимых задач, можно сделать следующее наблюдение: в первой и четвертой из них общая единичная эпюра состоит из двух независимых единичных эпюр (Рис. 2, ж, и, и Рис. 3, з; Рис. 7, ж). Во второй и третьей задачах, напротив, эпюры, которые мы обозначали «1<sup>-</sup>» и «1<sup>+</sup>», «накладываются» друг на друга, что несколько усложняет решение. Строго говоря, речь идет о коэффициенте  $\delta_{11}^\pm$ , который в первой ( $\delta_{11}^\pm = N_1^- \otimes N_1^+$ ) и четвертой ( $\delta_{11}^\pm = M_1^- \otimes M_1^+$ ) задачах равен нулю. Тогда  $\delta_{11} = \delta_{11}^- + \delta_{11}^+$ .

В задачах растяжения-сжатия и кручения, где в сечении по определению действует всего один внутренний силовой фактор, отдельные единичные эпюры независимы всегда, потому что эпюра

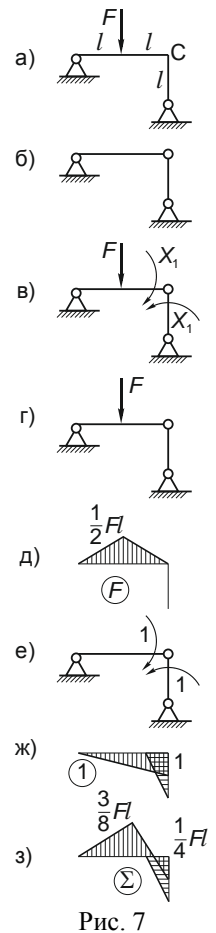


Рис. 7

внутреннего силового фактора не может, фигурально выражаясь, «перескочить» через сечение, где отброшена связь (сечение Н в первой задаче). В задачах изгиба, то есть в балках и рамах любой размерности, в общем случае такое правило не работает. В самом деле, изгибающий момент в сечении, где разрешено взаимное линейное перемещение (точка В на Рис. 4, в), равно как и поперечная сила во врезанном шарнире, в общем случае отличны от нуля.

Что же касается четвертой задачи, то с ней просто «повезло» из-за ее простоты: стоит слегка усложнить расчетную схему, как общая единичная эпюра с обеих сторон от врезанного шарнира будет отличаться от каждой из единичных эпюр от одного момента.

Напоследок рассмотрим дважды статически неопределимую раму Рис. 8, а. Цель расчета на жесткость состоит в определении горизонтального перемещения сечения А и углового – сечения В. Сначала решим задачу традиционным, а затем – предлагаемым методом.

Ход решения показан на Рис. 8, б-ж, и вполне ясен. Обобщенные перемещения равны

$$\delta_{11} = 3l^3; \quad \delta_{12} = -2l^3; \quad \delta_{22} = \frac{32}{3}l^3; \quad \delta_{1F} = -\frac{1}{3}Fl^3; \quad \delta_{2F} = -Fl^3$$

Решение канонической системы уравнений дает:

$$X_1 = \frac{25}{126}F; \quad X_2 = \frac{11}{84}F$$

Найдем момент в сечении В:

$$M_B = \frac{1}{2} \left( -\frac{4}{63}Fl + \frac{25}{126}Fl \right) = \frac{17}{252}Fl \quad (10)$$

(сжатые слои снизу). Далее выполняем требуемые расчеты на жесткость (Рис. 9):

$$EI_x x_A = -\frac{l}{6} \cdot l \left( 2 \cdot \frac{11}{42}Fl + \frac{4}{63}Fl \right) + \frac{l}{6} \left[ l \left( -2 \cdot \frac{11}{42}Fl + \frac{34}{63}Fl \right) + 2l \left( 2 \cdot \frac{34}{63}Fl - \frac{11}{42}Fl \right) \right] = \frac{67}{378}Fl^3$$

$$EI_x \theta_B = \frac{1}{2} l \left[ \frac{33}{64}Fl - \frac{11}{42}Fl - \frac{11}{42}Fl - \frac{4}{63}Fl - \frac{4}{63}Fl + \frac{17}{252}Fl \right] = -\frac{11}{504}Fl^2$$

Горизонтальное перемещение сечения А происходит вправо, поворот сечения В – против часовой стрелки.

Теперь перейдем к предлагаемому методу выбора основной системы.

Напомним, что его суть состоит в том, что отбрасываются только внутренние связи, причем как раз запрещающие искомые перемещения. Следовательно, надо разрешить взаимное горизонтальное перемещение сечений по обе стороны от А, и взаимный поворот сечений справа и слева от В.

Первая расчетная схема уже использовалась на Рис. 3, а, только теперь ее механический аналог проще представить: на верхнем конце стойки AD находится короткая жесткая трубка, в которой без трения и зазора свободно перемещается левый конец ригеля AC. Также отметим, что в силу весьма большой осевой жесткости по сравнению с изгибной взаимное горизонтальное перемещение можно разрешить в любой точке ригеля, в том числе в точке В. Правда, описать механическое устройство, разрешающее только продольное перемещение смежных сечений и запрещающее их поперечное смещение и поворот, будет гораздо сложнее. Однако такое объяснение и не требуется.

Итак, вторая основная система показана на Рис. 10, а, эквивалентная – на Рис. 10, б. В рамках предлагаемого метода единичные силовые факторы прикладываются не попарно, как обычно, а по одному. Начнем с силы, приложенной к ригелю – Рис. 11, а. Разделяем расчетную схему на две части Рис. 11, б, и вводим реакции внутренней связи R и M. Подобную расчетную схему приходится применять редко, поэтому нелишним будет, хотя бы один раз, расписать решение подробно.

Сначала из проекции сил на горизонталь для правой части конструкции находим горизонтальную реакцию неподвижного шарнира – она равна 1 и направлена влево. Далее, составляя сумму моментов справа (снизу) от точки В, определяем вертикальную реакцию в неподвижном шарнире

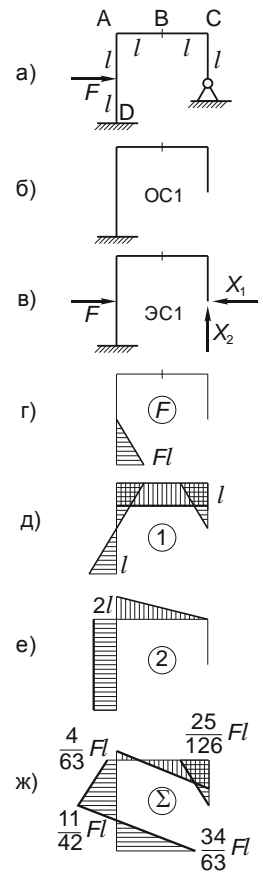


Рис. 8

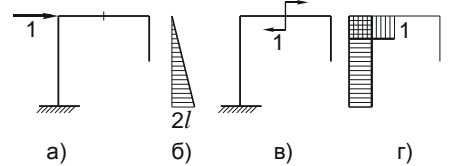


Рис. 9

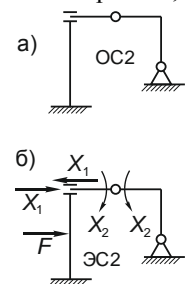


Рис. 10

– 1 вверх. Тогда из суммы на вертикаль следует  $R = 1$ . Наконец, из суммы моментов слева от врезанного шарнира находим  $M = l$ .

Переходим к левой части – стойке AD, силовые факторы на верхнем конце которой уже найдены. Вертикальная сила на эпюру моментов не влияет, а момент в заделке равен  $l$  и направлен против часов. Таким образом, безопорная расчетная схема имеет вид Рис. 11, в, а ее эпюра – Рис. 11, г.

Далее аналогично строим единичную эпюру для второй силы Рис. 12. Сложив единичные эпюры «1<sup>-</sup>» и «1<sup>+</sup>», получаем первую общую единичную Рис. 13.

Расчетная схема для построения грузовой эпюры имеет вид Рис. 14, а сама она в точности совпадает с таковой для ОС1 – Рис. 8, з.

Аналогично рассматриваем по отдельности два единичных момента, соответствующих  $X_2$  (Рис. 15). Находим обобщенные перемещения

$$\delta_{11} = \frac{29}{3}l^3; \quad \delta_{12} = -\frac{26}{3}l^2; \quad \delta_{22} = \frac{32}{3}l;$$

$$\delta_{1F} = -\frac{1}{4}Fl^3; \quad \delta_{2F} = Fl^2$$

Раскрываем статическую неопределимость:

$$X_1 = \frac{25}{126}F; \quad X_2 = \frac{17}{252}Fl$$

Учитывая, что решение по ОС1 уже получено, можно даже без построения суммарной эпюры удостовериться, что сошлись сразу две проверки. Во-первых, величина  $X_1$ , имеющая в обеих ОС физический смысл горизонтальной силы в ригеле, оказалась той же. Во-вторых, момент в сечении В (10) совпал с  $X_2$  во второй ОС.

Отметим, что единичные эпюры для ОС1 Рис. 9, б, и для ОС2 Рис. 12, б, (с точностью до знака) идентичны, поэтому нет ничего удивительного в том, что результаты расчета на жесткость сходятся. То же самое можно сказать про эпюры Рис. 9, з, и Рис. 15, б.

Подводя итоги задачи, подсчитаем общее число эпюр по обеим ОС без учета эпюр  $X_1$  и  $X_2$ . В ОС1: грузовая, две единичных, суммарная и две эпюры для расчетов на жесткость – итого шесть. В ОС2: по три единичных на каждую неизвестную, грузовая, суммарная – всего восемь. Но вновь встает вопрос о проверке решения! Если получать его с помощью ОС1, то придется изыскивать еще одну ОС, прикладывая к ней единичные силовые факторы и искать перемещения – в итоге те же восемь эпюр. Напротив, ОС2 выглядит самодостаточной, потому что горизонтальное перемещение сечение А можно получить, перемножив грузовую эпюру Рис. 8, з, как на первую единичную «1<sup>-</sup>» Рис. 11, з, так и на вторую «1<sup>+</sup>» Рис. 12, б, проверяя и модуль, и направление. Для проверки угла поворота сечения В уже готовы опять же две единичных эпюры Рис. 15, б и в, и больше ничего рисовать не нужно. Более того, в ОС2 все единичные эпюры строятся от одного, а не от двух факторов.

И, наконец, обратим внимание, что общие единичные эпюры Рис. 13 и Рис. 15, з, получаются простым сложением по точкам: не надо искать реакции связей и составлять уравнения равновесия. Так что совокупная трудоемкость решения по ОС2 уж точно не выше, чем по ОС1, а скорее – заметно ниже.

В заключение можно сказать, что, хотя данный метод в некоторых задачах способен существенно упростить и сократить решение, не стоит рекомендовать его для любых задач. Ведь расчет на жесткость почти всегда является лишь промежуточным этапом для раскрытия статической неопределенности и в постановку задачи входит не так часто.

Кроме того, даже в последнем случае метод не всегда применим. Например, если бы в задачах на плоские рамы требовалось найти угол поворота одного из концов рамы, подпертого шарниром.

Наконец, необходимость работы с непривычными и экзотическими расчетными схемами типа Рис. 3, а, или Рис. 4, в, зачастую если и не отменяет, то, по крайней мере, снижает преимущества предлагаемого метода.

Автор благодарит к.т.н. В. К. Семенова за ценные замечания и советы

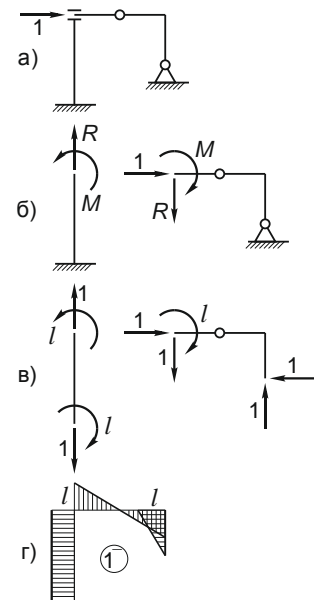


Рис. 11

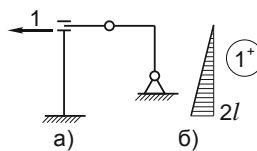


Рис. 12

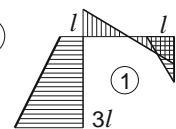


Рис. 13

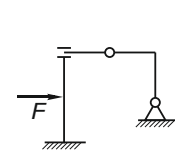


Рис. 14

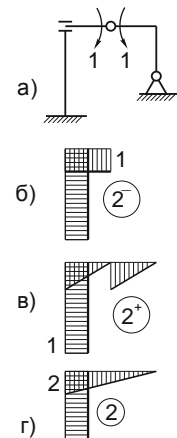


Рис. 15