Закон подлости для сечений валов

Народная мудрость, известная как закон подлости, формулируется приблизительно следующим образом: «Из всех возможностей реализуется наименее благоприятная». Иногда его отождествляют с законом Мэрфи, который изначально, на языке автора, звучал так: «Anything that can go wrong will go wrong» («Всё, что может быть плохо, будет плохо»). Закон Мэрфи впервые был применён к сборке самолётного двигателя, позже – к любым техническим системам, и лишь затем был перенесён на повседневную жизнь. Поэтому нет ничего удивительного в том, что в отношении инженерных задач закон Мэрфи срабатывает почти всегда. Точнее, удалось обнаружить всего один раздел механики деформируемого твёрдого тела, где закон подлости опровергается чаще, чем соблюдается. Речь идёт о сечениях валов, то есть стержней, работающих на кручение. Напомним основные положения этого раздела.

Выделяют четыре типа плоских фигур, являющихся поперечными сечениями валов:

Круговые, то есть состоящие из концентрических окружностей. Таковых три: сплошной круг, толстостенная труба и тонкостенная труба (Рис. 1). Точное решение для них было получено ещё Т. Юнгом в начале XIX в. Касательные напряжения линейно зависят от радиуса, достигая максимума на внешнем контуре.

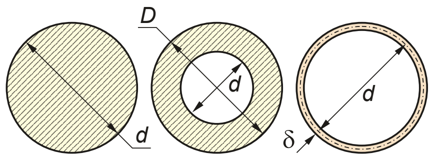

Рис. 1

Тонкостенные открытые сечения (Рис. 2). Через s_i обозначен размер i-го участка вдоль дуговой координаты. Задача расчёта подобных сечений является весьма сложной, ниже приводится самая простая методика определения геометрических характеристик. Однако распределение касательных напряжений известно точно: максимум на контуре и нуль на средней линии. Опасные точки расположены в местах, где толщина наибольшая, как бы парадоксально это ни звучало. Геометрические характеристики жёсткости и прочности, соответственно, ищутся по формулам

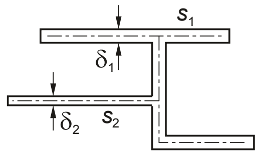

Рис. 2

$$I_K = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^3 s_i; \qquad W_K = \frac{I_K}{\delta_{\max}}$$

где n – число участков. В частном случае постоянной толщины формулы приобретают вид:

$$I_K = \frac{1}{3}\delta^3 s; \qquad W_K = \frac{1}{3}\delta^2 s \tag{1}$$

Тонкостенные закрытые (замкнутые) сечения (Рис. 3). По толщине напряжения распределены равномерно, а опасные точки находятся там, где толщина минимальна, что как раз вполне ожидаемо. Геометрические характеристики жёсткости и прочности, соответственно:

$$I_K = \frac{(2A^*)^2}{\int \frac{ds}{\delta}}; \qquad W_K = 2A^*\delta_{\min}$$

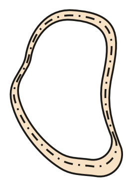
Рис. 3

При постоянной толщине

$$I_K = \frac{(2A^*)^2\,\delta}{s} \tag{2}$$

$$W_K = 2A^*\delta$$

здесь A^* - площадь, ограниченная средней линией, s – её длина.

Сравнительная картина распределения напряжений в тонкостенных контурах – открытых и закрытых – показана на Рис. 4, *а* и *б*, соответственно.

Все прочие сечения. Общего решения для них не существует, зато выведены формулы для наиболее важных частных случаев: прямоугольник, треугольник, эллипс, вал со шпоночной канавкой и др.

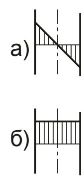

Рис. 4

Для всех сечений справедливы следующие закономерности распределения напряжений: на контуре они направлены по касательной к последнему, а во внешних углах равны нулю. Кроме того, все сечения, кроме круговых, в разной мере претерпевают депланацию, то есть выход изначально плоских сечений из своей плоскости. Иначе говоря, только для круговых профилей гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли-Навье) возвращает точный результат.

Теперь зададимся вопросом о том, какие сечения являются оптимальными для валов. В качестве основных критериев оптимальности выступают прочность, жёсткость и технологичность, дополнительных – масса вала (площадь сечения) и его габаритный размер.

Вначале рассмотрим тонкостенные открытые сечения. В формулы (1) толщина входит в третьей, а длина участка – в первой степени, а поскольку по определению тонкостенного профиля $\delta << s$, то получается, что обе геометрических характеристики открытого профиля существенно меньше, чем у закрытого, при прочих равных условиях.

Например, если взять два профиля в виде тонкостенного квадрата с постоянной толщиной стенки, только один из них разрезан по образующей (Рис. 5), и принять для определенности соотношение размеров $a = 20\delta$, то нетрудно показать, что прочность закрытого в 30 раз, а жёсткость – в 300 раз больше, чем открытого!

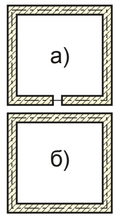

Рис. 5

Рассматривая только закрытые сечения постоянной толщины стенки, можно заметить, что в формулу (2) площадь входит во второй, а периметр – в минус первой степени. То есть, жёсткость вала тем больше, чем больше площадь фигуры, охваченной поперечным сечением, и чем меньше периметр. А из геометрии известно, что среди фигур с заданным периметром наибольшей площадью обладает именно круг. Значит, тонкостенная труба будет оптимальным решением для валов с закрытым тонкостенным профилем. К тому же, она ещё и наиболее технологична. Ну и, наконец, по массе она является наилучшей среди не только тонкостенных, но и вообще всех возможных валов.

Из толстостенных сечений труба оптимальна хотя бы потому, что полностью лишена внешних углов: ведь в них напряжения равны нулю, а значит, эти части сечения не сопротивляются моменту, а просто несут массу.

И, наконец, среди сплошных фигур по той же причине круг лучше любой другой. Более того, цилиндрический вал является самым технологичным изделием среди всех возможных. И в завершение, он ещё и наименьший по габариту при прочих равных условиях.

Таким образом, круговые сечения оптимальны по всем разумным критериям. Для применения любого другого сечения должны быть очень веские (и, вероятно, довольно специфические) основания. Подобная безальтернативность является крайне редким случаем: обычно в пользу каждого из вариантов говорят разные аргументы, и зачастую принять правильное решение трудно. В нашем случае выбор очевиден. В этом и состоит первый пример нарушения закона подлости.

Но и это ещё не всё. Почти всегда для решения каждой задачи предлагаются разные методы, одни из которых просты, но имеют большую погрешность, другие, напротив, более точны, но слишком громоздки и сложны для применения. Поэтому приходится постоянно делать мучительный выбор между простотой и точностью. Никакого «правильного» решения здесь не существует, и приходится опираться на интуицию, традиции, побочные соображения. Если же мы сравниваем круговые сечения, с одной стороны, и все прочие, с другой, то, как уже отмечалось, решение для первых из них является точным, при этом ещё и предельно простым. Например, для сплошного круга

$$I_K = \frac{\pi d^4}{32}; \qquad W_K = \frac{\pi d^3}{16}$$

Сравнение этих выражений со всеми вышеприведенными формулами будет явно не в их пользу, причём по любым признакам. Таков второй случай опровержения закона подлости.

Ну и, наконец, необходимо напомнить, что круговые сечения не склонны к депланации, причем как при свободном, так и при стеснённом кручении. А депланация – это снижение точности расчетных формул, с теоретической точки зрения, и ухудшение прочности из-за действия нормальных напряжений – с практической. Таков ещё один аргумент в пользу круговых сечений валов, и ещё один, третий, пример нарушения закона Мэрфи.

Теперь обратимся к уже затронутому сравнению тонкостенных сечений – открытых и закрытых. Выше было показано, что по прочности и жёсткости их даже сопоставлять нельзя – настолько разгромно проигрывают открытые. Но, более того, они терпят поражение и по другим признакам. Например, закрытый профиль постоянной толщины (единственный из всех сечений!) является равнопрочным, то есть идеальным – во всех его точках напряжения постоянны. Что же касается открытых сечений, то в них распределение напряжений (Рис. 4, *а*) весьма невыгодно: вдоль средней линии напряжения малы или отсутствуют, а значит, эти части вала просто бесполезны. Но удалить их нельзя в силу малой толщины стенки. Вот мы и нашли четвёртый пример, когда закон подлости не выполняется: тягостный выбор между открытыми и закрытыми тонкостенными контурами просто не имеет места.

То есть кажется, что тонкостенные открытые и закрытые профили являются полными антиподами: что характерно для одних, совершенно неприменимо к другим. Однако есть один случай, когда ответы на один и тот же вопрос для этих, таких разных, сечений, совпадают, пусть и по разным причинам.

Вернемся к Рис. 5. Допустим, поступает предложение увеличить толщину стенки вдоль правого края профиля (Рис. 6, $\delta_1 < \delta_2$). Против такого предложения выступает инженер-конструктор: он справедливо полагает, что увеличение массы не даст никаких преимуществ.

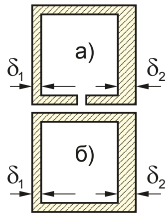

Рис. 6

Инженер-технолог тоже недоволен. Он считает, что если прокатка листа постоянной толщины – задача обычная, хорошо отработанная и относительно простая, то получение переменной толщины листа требует специальных валков и оснастки, изменения режима нагрева. Иными словами, технологичность конструкции резко снижается.

Причем для обоих специалистов не имеет значения, открытым будет профиль или закрытым.

Наконец, своё мнение высказывает инженер-прочнист. Говоря об открытом профиле, он указывает на то, что если раньше максимальные напряжения были постоянны на всех точках поверхности, то теперь в местах увеличенной толщины созданы точки с напряжением, превышающим исходное. И хотя прочность и жёсткость сечения тоже выросли, локализация опасных точек все равно должна быть признана неудачной. В случае же закрытого контура при местном увеличении толщины контур перестал быть равнопрочным, а это концептуально ошибочно. К тому же, заключает он, ни прочность, ни жёсткость закрытого контура не изменились.

Таким образом, мнения трех главных специалистов по проектированию механических конструкций сошлись, а такое случается крайне редко. Это, пожалуй, самый яркий из пяти примеров, когда закон подлости не работает.

…Иногда в жизни события всё же складываются по наилучшему сценарию – исключения, как известно, лишь подтверждают правило. Сейчас речь идет не о результате целенаправленных усилий, а именно о стечении обстоятельств, удаче, везении. Люди выигрывают в лотерею, совершают ценные находки, получают крупные наследства, делают внезапные открытия, наконец, неожиданно обретают взаимную любовь… Подобные благоприятные исходы случаются и в науке, технике, инженерном деле. Удивительно не то, что закон Мэрфи нарушается, а то, что нарушается он в очень узкой области знаний.

Хочется верить, что когда-нибудь эта загадка будет раскрыта…