

## Расчет на прочность участка трубопровода с коленом

Два цилиндрических участка трубы АВ и CD соединены участком ВС, представляющим собой четверть открытого тора (Рис. 1). Такие участки в машиностроении называют коленями или отводами. Труба нагружена внутренним давлением  $p$  и моментом  $M$ . Необходимо изучить напряженное состояние трубы, используя критерий Треска-Сен-Венана. Размеры всех участков вдоль дуговой координаты считаются весьма большими сравнительно с диаметром. Краевыми эффектами близ сечений А, В, С и D можно пренебречь.

Сперва найдем окружное и меридиональное напряжения на цилиндрических участках:

$$\sigma_t = \frac{pd}{2\delta} = \frac{p}{2} \cdot 36 = 18p; \quad \sigma_m = \frac{pd}{4\delta} = 9p \quad (1)$$

Формулы для торовой оболочки из работы [1] после приведения к исходным обозначениям задачи и некоторых преобразований имеют вид

$$\sigma_t = \frac{pd}{4\delta} \frac{4b + d \sin \theta}{2b + d \sin \theta} \quad (2)$$

$$\sigma_m = \frac{pd}{4\delta} \quad (3)$$

Из формул (1)...(3) видно, что если меридиональное напряжение в торе не отличается от такового в цилиндре, то окружное напряжение существенно зависит от радиуса  $b$  кривизны колена.

При  $b = 0$  тор вырождается в сферу, а при  $b = \infty$  – в цилиндр. Наибольшие напряжения ( $\sigma_t = \infty$ ) возникают в торе, у которого  $b = \frac{d}{2}$ . Расчет тора по

безмоментной теории дает достаточно точные результаты, если  $b > d$ . При меньших  $b$  следует воспользоваться моментной теорией оболочек. Однако она далеко выходит за рамки курса сопротивления материалов и изучается в курсе строительной механики как одна из самых сложных, но точных, теорий оболочек. Можно попытаться выяснить, какие соотношения между радиусом кривизны колена и диаметром трубы применяются в реальных трубопроводах.

В нормативных документах у этого отношения нет какого-либо специального обозначения и названия. Например, ГОСТ 17375-2001 (ИСО 3419-81) «Отводы крутоизогнутые типа 3D ( $R \approx 1,5 DN$ )» содержит характеристики как раз подобных колен: в наших обозначениях  $R \equiv b$ ,  $DN \equiv d$ , то есть  $b \approx \frac{3}{2}d$ . На самом

деле величина этого отношения лежит в диапазоне примерно 1.12...1.5. В ГОСТ 22818-83 «Сборочные единицы и детали трубопроводов. Колена с углом  $90^\circ$ ...» это отношение меняется в пределах 1.2...1.6. В дальнейшем для определенности предполагается, что  $b = 2d$ . Такое отношение, с одной стороны, не сильно отличается от используемых на практике, а с другой стороны, позволяет оставаться в рамках безмоментной теории.

На Рис. 2 показан вид сечения В (Рис. 1) при направлении взгляда от В к А. Угол  $\theta$  для текущей точки L определяется следующим образом: из точки L восстанавливается перпендикуляр к поверхности (который в торе неизбежно проходит через центр образующей окружности) и продолжается до пересечения с осью тора, и тогда угол  $\theta$  есть угол между перпендикуляром и осью. Направление положительного отсчета угла показано на рисунке. Началом отсчета ( $\theta = 0^\circ$ ) согласно тригонометрии полагается точка К, затем текущая точка перемещается по окружности против часовой стрелки.

На Рис. 3 приведены зависимости окружного напряжения (2) от угла  $\theta$  для разных

отношений  $\frac{b}{d}$ . Можно видеть, что с его увеличением напряжение в точках тора имеет тенденцию к

выравниванию и стремится к значению, характерному для цилиндра, в нашем случае  $\sigma_t = 18p$  (1).

Таким образом, легко заметить, что опасные точки тора, нагруженного давлением, располагаются на внутренней дуге окружности (ее след на Рис. 2 – точка Е, в которой  $\theta = 270^\circ$ ), где чаще всего разрушение колен и происходит. На внешней дуге окружности (точка G, где  $\theta = 90^\circ$ ) напряжение наименьшее, а напряжение в точках Н ( $180^\circ$ ) и К ( $0^\circ$ ) такое же, как в цилиндрической оболочке при прочих равных условиях.

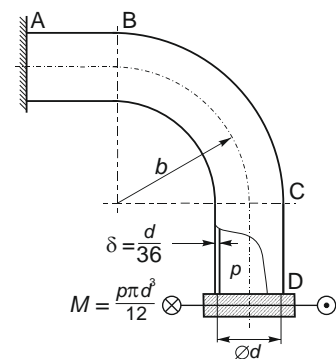


Рис. 1

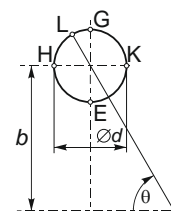


Рис. 2

То есть можно не рассматривать зависимость напряжений от угла  $\theta$ , поскольку опасные точки торового участка располагаются на окружности, проходящей через точку Е. Тогда в формуле (2) можно положить  $\theta = 270^\circ$ , и после учета заданного отношения диаметра и толщины, а также принятого отношения диаметра и радиуса кривизны ( $b = 2d$ ) формулы (2) и (3) приобретают гораздо более простой вид:

$$\sigma_t = 21p, \quad \sigma_m = 9p \quad (4)$$

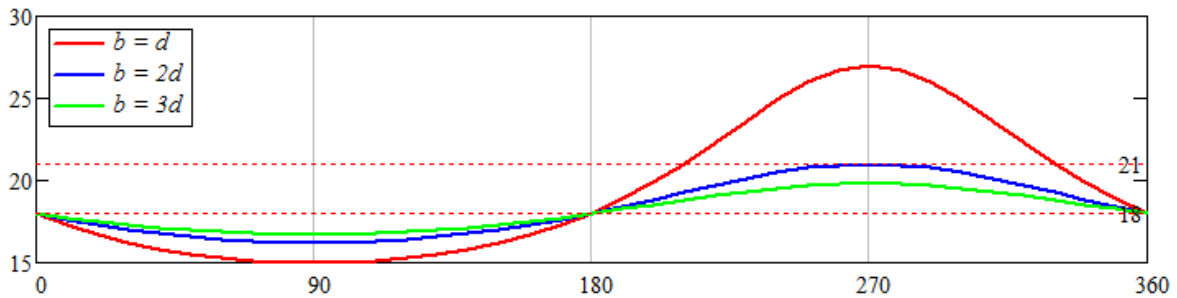


Рис. 3

Теперь рассмотрим влияние на напряженное состояние колена со стороны момента  $M$ . Для этого удобно представить момент как псевдовектор (или осевой вектор). Если не производить преобразований систем координат типа поворота и зеркального отражения, разница между псевдовектором и обычным (полярным) вектором не проявляется. Механический момент (момент силы) относительно заданной точки можно мыслить как псевдовектор, перпендикулярный плоскости, образованной вектором силы и радиус-вектором, построенным из заданной точки до точки приложения силы. Модуль проекции радиус-вектора на перпендикуляр к линии действия силы обычно называют плечом силы. Направление псевдовектора момента определяется по правилу буравчика (правилу правой руки): если при взгляде вдоль оси псевдовектора сила производит вращение по часовой стрелке, то псевдовектор направлен от наблюдателя, против часовой – на наблюдателя, то есть правило знаков для псевдовектора совпадает с правилом знаков для крутящего момента. Иногда в литературе псевдовектор для его зрительного различения с полярным вектором обозначается стрелкой не с одним, а с двумя острями.

Разрежем торовый участок поперечным сечением с текущим углом  $\beta$  (Рис. 4, а) и просто спроецируем псевдовектор  $M$  (обозначен красным цветом) на радиальное и осевое направления, получив псевдовектора изгибающего (синим) и крутящего (зеленым) моментов соответственно. Таким образом,

$$M_x = M \sin \beta; \quad M_z = M \cos \beta$$

Впрочем, формулы можно получить и несколько более длинным путем, зато без использования понятия псевдовектора.

Представим момент как пару сил, то есть  $M = 2F \cdot a$ , где  $F$  – одна из сил пары (вообще говоря, произвольная),  $a$  – плечо, равное  $\frac{M}{2F}$ .

Из Рис. 4, б видно, что результат получился тем же.

Для тонкостенной трубы нормальное (изгибающее) и касательное напряжения при заданных размерах равны соответственно

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = M \sin \beta \frac{4}{\pi d^2 \delta} = \frac{p \pi d^3}{12} \sin \beta \frac{4}{\pi d^2 \delta} = \frac{p}{3} \cdot \frac{d}{\delta} \sin \beta = 12p \sin \beta \quad (5)$$

$$\tau = \frac{M_z}{W_K} = M \cos \beta \frac{2}{\pi d^2 \delta} = \frac{p}{6} \cdot \frac{d}{\delta} \cos \beta = 6p \cos \beta$$

На Рис. 5 показан вид конструкции при взгляде сверху, то есть от сечения С к сечению D. Видим консоль, нагруженную изгибающим моментом на конце. В точках дуги, проходящей через точку К (на Рис. 1 она дальняя от наблюдателя и является невидимой) слои растянуты, в точке Н (ближней к наблюдателю) – сжаты, и изгибающее напряжение (5) имеет там знаки плюс и минус соответственно. Меридиональное и окружное напряжения согласно формулам (2) и (3) при  $\theta = 0$

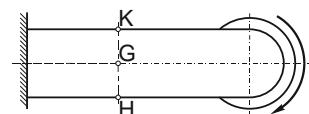


Рис. 5

(точка К) и  $\theta = 270^\circ$  (точка Н) всюду положительны и равны  $9p$  и  $18p$  соответственно. Напряженное состояние, как обычно в оболочках – плоское, причем на дальней дуге

$$\sigma' = \sigma_m + \sigma_x = 9p + 12p \sin \beta = 3p(3 + 4 \sin \beta); \quad \sigma'' = \sigma_t = 18p; \quad \tau = 6p \cos \beta$$

а на ближней дуге

$$\sigma' = \sigma_m - \sigma_x = 3p(3 - 4 \sin \beta); \quad \sigma'' = \sigma_t = 18p; \quad \tau = 6p \cos \beta$$

Точка Е, принадлежащая внутренней окружности, на Рис. 5 располагается строго под точкой G и поэтому является невидимой. Точки Е и G, таким образом, находятся на нейтральной линии консоли и поэтому в них изгибное напряжение равно нулю. Следовательно, на точке внутренней окружности с текущим углом  $\beta$ :

$$\sigma' = \sigma_t = 21p; \quad \sigma'' = \sigma_m = 9p; \quad \tau = 6p \cos \beta \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma_{I, II} &= \frac{\sigma' + \sigma''}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \sigma''}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{21p + 9p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{21p - 9p}{2}\right)^2 + (6p \cos \beta)^2} = \\ &= 15p \pm 6p \sqrt{1 + \cos^2 \beta}; \quad \sigma_{III} = 0 \end{aligned}$$

При  $\beta = 0$  (внутренняя точка в сечении С) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_I = 15p + 6p\sqrt{2} \approx 23.5p; \quad \sigma_{II} = 15p - 6p\sqrt{2} \approx 6.5p; \quad \sigma_{III} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \sigma_1 = 23.5p; \quad \sigma_2 = 6.5p; \quad \sigma_{III} = 0 \rightarrow \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 23.5p \end{aligned}$$

Точку G можно не рассматривать: окружное напряжение в ней минимально, а изгибное отсутствует.

На Рис. 6 показаны результаты расчета колена на прочность. Опасная точка находится в сечении С на внутренней поверхности тора. Эквивалентное напряжение в ней равно  $23.5p$ .

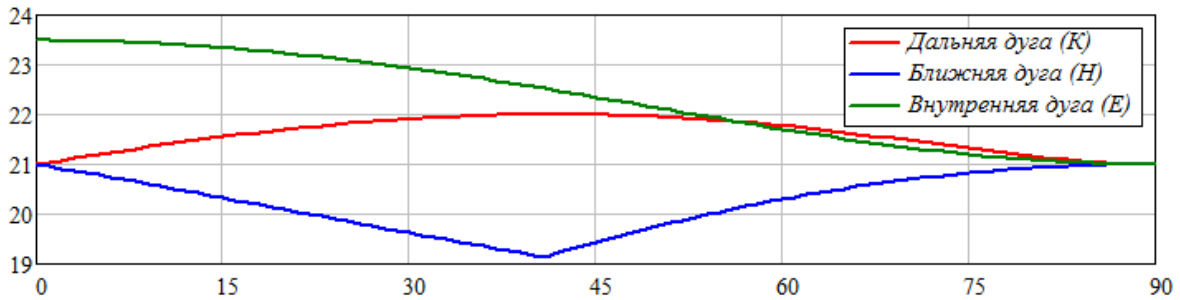


Рис. 6

Теперь перейдем к расчету цилиндрических участков.

На участке CD действуют нормальные напряжения (1) и касательное

$$\tau = \frac{M_z}{W_K} = \frac{M}{\pi d^2 \delta} \cdot 2 = 6p$$

Главные и эквивалентное напряжения ищутся по формулам для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{I, II} = \frac{\sigma_t + \sigma_m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_t - \sigma_m}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{18p + 9p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{18p - 9p}{2}\right)^2 + (6p)^2} = \frac{27}{2}p \pm \frac{15}{2}p; \quad \sigma_{III} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_1 = \frac{27}{2}p + \frac{15}{2}p = 21p; \quad \sigma_2 = \frac{27}{2}p - \frac{15}{2}p = 6p; \quad \sigma_3 = 0 \rightarrow \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 21p$$

На участке АВ имеем суперпозицию плоского напряженного состояния с напряжениями (1), и одноосного сжатия (ближняя образующая) и одноосного растяжения (дальняя), причем модуль изгибного напряжения

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M}{\pi d^2 \delta} \cdot 4 = 12p$$

Тогда на ближней образующей

$$\begin{aligned} \sigma_I = \sigma_m - \sigma_x = 9p - 12p = -3p; \quad \sigma_{II} = \sigma_t = 18p; \quad \sigma_{III} = 0 \rightarrow \sigma_1 = 18p; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -3p \rightarrow \\ \rightarrow \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 18p - (-3p) = 21p \end{aligned}$$

а на дальней

$$\begin{aligned} \sigma_I = \sigma_m + \sigma_x = 9p + 12p = 21p; \quad \sigma_{II} = \sigma_t = 18p; \quad \sigma_{III} = 0 \rightarrow \sigma_1 = 21p; \quad \sigma_2 = 18p; \quad \sigma_3 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \sigma_{\text{экв}} = 21p \end{aligned}$$

Таким образом, если не учитывать колена – конструкция относительно равнопрочна ( $\sigma_{\text{экв}} = 21p$ ). Однако в колене эквивалентное напряжение на 11.8% выше ( $\sigma_{\text{экв}} \approx 23.5p$ ). Если же отношение  $\frac{b}{d}$  будет увеличиваться, торовый участок вполне можно будет считать цилиндрическим и конструкция вновь окажется равнопрочной. Например, при  $\frac{b}{d} = 8$  погрешность такого утверждения составит всего 2.3%.

Автор благодарит к.т.н. В. К. Семенова за помощь в написании статьи.

1. Погорелов В. И., Строительная механика тонкостенных конструкций, СПб, «БХВ-Петербург», 2007