Определение геометрических характеристик плоской фигуры, состоящей из прямоугольников

Дана фигура в виде буквы «Д», показанная на Рис. 1. Сторона квадрата сетки принимается равной безразмерной единице. Требуется найти центр тяжести фигуры, ее осевые момент инерции и момент сопротивления относительно главной центральной горизонтальной оси.

Для описания прямоугольников будем использовать «шахматную» нотацию, только сочетанию «буква+цифра»-«буква+цифра» будет соответствовать левый нижний и правый верхний углы прямоугольника. Каждому слагаемому в формуле для статического момента будет соответствовать свой цвет, а заштрихованные прямоугольники – пустоте, то есть тем фигурам, которые вошли в состав других фигур, но должны быть из них исключены.

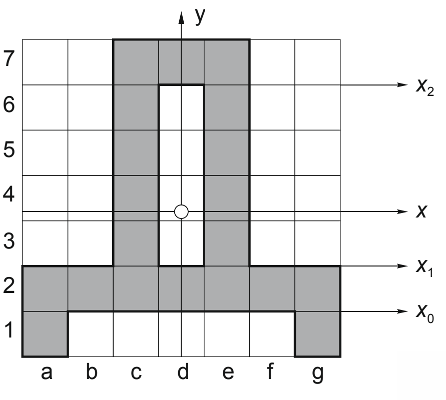

Рис. 1

Сначала найдем площадь фигуры:

$$A = A_{c3-e7} + A_{a1-g2} - A_{d3-d6} - A_{b1-f1} = 3\cdot5 + 7\cdot2 - 1\cdot4 - 5\cdot1 = 15 + 14 - 4 - 5 = 20$$

Возьмем в качестве начальной (пробной) оси x_0 (Рис. 2):

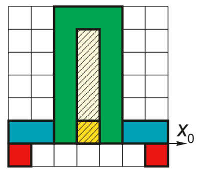

Рис. 2

$$S_{x0} = 2\cdot S_{a1} + 2\cdot S_{a2-b2} + S_{c2-e7} - S_{d2-d6} + S_{d2} =$$

$$= 2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot6\cdot3 - 1\cdot5\cdot\frac{5}{2} + 1\cdot1\cdot\frac{1}{2} = -1 + 2 + 54 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = 43$$

$$y_{x0}^{C} = \frac{43}{20}$$

$$I_{x0} = \frac{1}{3}\left(2\cdot I_{a1} + 2\cdot I_{a2-b2} + I_{c2-e7} - I_{d2-d6} + I_{d2}\right) =$$

$$+\frac{1}{3}\left(2\cdot1\cdot1^3 + 2\cdot2\cdot1^3 + 3\cdot6^3 - 1\cdot5^3 + 1\cdot1^3\right) = \frac{1}{3}\left(2 + 4 + 648 - 125 + 1\right) = \frac{530}{3}$$

$$I_x = I_{x0} - A\cdot\left(y_{x0}^{C}\right)^2 = \frac{530}{3} - 20\cdot\left(\frac{43}{20}\right)^2 = \frac{530}{3} - \frac{43^2}{20} = \frac{530\cdot20 - 3\cdot43^2}{60} = \frac{5053}{60}$$

Проверить полученный результат можно несколькими способами. Один из самых простых (и, соответственно, наименее надежных) заключается в подсчете моментов инерции двух прямоугольников, один из которых полностью включает в себя данную фигуру, а другой, наоборот, имеет момент инерции заведомо меньше, чем у нее. Обозначим эти два момента инерции через $I_{\max}$ и $I_{\min}$ соответственно. Тогда проверка состоит в соблюдении неравенства

$$I_{\min} < I_x < I_{\max} \tag{1}$$

$$I_{\max} = I_{a1-g7} = \frac{1}{12}7\cdot7^3 = \frac{2401}{12} \approx 200$$

$$I_{\min} = I_{c2-e7} = \frac{1}{12}3\cdot6^3 = \frac{648}{12} = 54$$

Учитывая, что $I_x \approx 84$, видим, что неравенство (1) соблюдается. Однако следует еще раз подчеркнуть низкую достоверность такого приема. К тому же, он не проверяет правильность определения центра тяжести.

Поэтому лучше выполнить еще один расчет относительно другой оси. Должны сойтись положение (но не координата!) центра тяжести, и момент инерции. Проверим относительно оси x_1 (Рис. 3):

$$S_{x1} = 2\cdot S_{a1-a2} + S_{b2-f2} + S_{c3-e7} - S_{d3-d6} =$$

$$= 2\cdot1\cdot2\cdot(-1) + 1\cdot5\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\cdot5\cdot\frac{5}{2} - 1\cdot4\cdot2 = -4 - \frac{5}{2} + \frac{75}{2} - 8 = 23$$

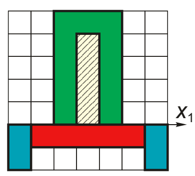

Рис. 3

$$y_{x1}^{C} = \frac{23}{20}$$

Откладывая полученный отрезок от оси x_1 вверх, убеждаемся, что центры тяжести, найденные двумя способами, совпали. Остается проверить моменты инерции:

$$I_{x1} = \frac{1}{3}\left(2\cdot I_{a1-a2} + I_{b2-f2} + I_{c3-e7} - I_{d3-d6}\right) = \frac{1}{3}\left(2\cdot1\cdot2^3 + 5\cdot1^3 + 3\cdot5^3 - 1\cdot4^3\right) = \frac{1}{3}\left(16 + 5 + 375 - 64\right) = \frac{332}{3}$$

$$I_x = I_{x1} - A\cdot\left(y_{x1}^{C}\right)^2 = \frac{332}{3} - 20\cdot\left(\frac{23}{20}\right)^2 = \frac{332\cdot20 - 3\cdot23^2}{60} = \frac{5053}{60}$$

Проверка сошлась. Однако мы выполним и третий расчет, теперь относительно оси x_2, хотя бы с целью обсуждения удобства выбора начальной оси (Рис. 4).

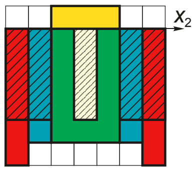

Рис. 4

$$S_{x2} = 2\cdot S_{a1-b6} + 2\cdot S_{b2-b6} - 2\cdot S_{a3-b6} + S_{c2-e6} - S_{d3-d6} + S_{c7-e7} =$$
$$= 2\cdot 1\cdot 6\cdot(-3) + 2\cdot 1\cdot 5\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) - 2\cdot 2\cdot 4\cdot(-2) + 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) - 1\cdot 4\cdot(-2) + 3\cdot 1\cdot\frac{1}{2} =$$
$$= -36 - 25 + 32 - \frac{75}{2} + 8 + \frac{3}{2} = -57$$

$$y_{x2}^C = -\frac{57}{20}$$

Нетрудно убедиться, что центр тяжести опять оказался в той же точке (отмечена светлым кружком на Рис. 1). Момент инерции:

$$I_{x2} = \frac{1}{3}\left(2\cdot I_{a1-a6} + 2\cdot I_{b2-b6} - 2\cdot I_{a3-b6} + I_{c2-e6} - I_{d3-d6} + I_{c7-e7}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(2\cdot 1\cdot 6^3 + 2\cdot 1\cdot 5^3 - 2\cdot 2\cdot 4^3 + 3\cdot 5^3 - 1\cdot 4^3 + 3\cdot 1^3\right) = \frac{1}{3}(432 + 250 - 256 + 375 - 64 + 3) = \frac{740}{3}$$

$$I_x = I_{x2} - A\cdot\left(y_{x2}^C\right)^2 = \frac{740}{3} - 20\cdot\left(-\frac{57}{20}\right)^2 = \frac{740}{3} - \frac{57^2}{20} = \frac{740\cdot 20 - 3\cdot 57^2}{60} = \frac{5053}{60}$$

Проверка опять сошлась.

Сравнивая оси с точки зрения удобства и простоты расчетов, нетрудно показать, что ось x_1 является наиболее, а x_2 – наименее удачной. Например, в выражения для статического момента и момента инерции для рассмотренных осей x_0, x_1 и x_2 входят 5, 4 и 6 слагаемых соответственно. Далее, алгебраические величины статических моментов равны по модулю 42, 23 и 57 соответственно, а чем меньше чи́сла – тем легче считать, и тем труднее ошибиться. Тот же аргумент справедлив для моментов инерции относительно начальных осей (числители равны 530, 332 и 740). И, наконец, важно количество прямоугольников, опирающихся одной своей стороной на выбранную ось. Оно равно двум, пяти и трем соответственно, поэтому в первом и последнем случаях возникла необходимость в довольно изощренных приемах разбиения фигуры.

В завершение можно сформулировать несколько простых советов по выбору начальной оси:

- Чем больше число контуров фигуры, через которые проходит ось, тем лучше;
- Чем больше в фигуре выступов и отверстий, тем ближе к ним следует располагать ось (в идеале – она должна проходить по их границам);
- Наметив умозрительно центр тяжести, следует выбирать ось как можно ближе к этой точке – чи́сла получатся меньше, а промежуточные выкладки – проще.

Осталось найти момент сопротивления. Расстояние от оси x до верхней границы фигуры равно

$$y_{верх} = \left|y_{x2}^C\right| + 1 = \frac{57}{20} + 1 = \frac{77}{20}$$

до нижней

$$y_{низ} = \left|y_{x0}^C\right| + 1 = \frac{43}{20} + 1 = \frac{63}{20} \rightarrow y_{\max} = \max\left(y_{верх}, y_{низ}\right) = \max\left(\frac{77}{20}, \frac{63}{20}\right) = \frac{77}{20}$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{5053}{60}\cdot\frac{20}{77} = \frac{5053}{231}$$

Для самопроверки предлагается найти геометрические характеристики фигуры в виде буквы «Ф» (Рис. 5). Результаты:

$A = 25$

$y_C = \dfrac{211}{50}$ (от нижней границы)

$I_x = \dfrac{29737}{300}$

$y_{\max} = \dfrac{211}{50}$

$W_x = \dfrac{29737}{1266}$

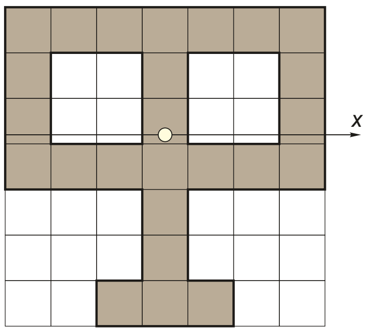

Рис. 5