

## Расчет внецентренно сжатой колонны с выемками

Изучается напряженное состояние центрально сжатой колонны с сечением в форме квадрата стороной  $a$ , при условии, что в колонне по конструктивным соображениям требуется сделать прямоугольную выемку глубиной  $k \cdot a$ , где  $0 < k < \frac{1}{2}$ . Причем по первой постановке задачи надо сделать одну выемку (Рис. 1, а), а по второй – две на смежных сторонах (Рис. 1, б).

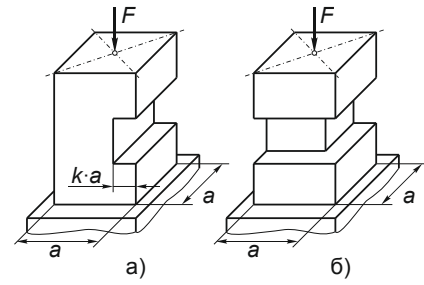


Рис. 1

Необходимо изучить не только две представленные расчетные схемы, но и еще три возможных – с дополнительными выемками (Рис. 2) и среди них выбрать оптимальную по прочности, в зависимости от параметра  $k$ . Будем считать, что в первой постановке задачи необходимая выемка находится снизу, а во второй – снизу и слева.

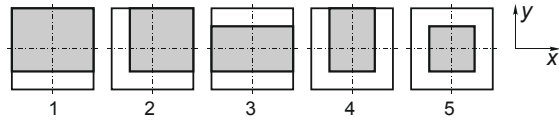


Рис. 2

Длина колонны считается весьма большой по сравнению с  $a$ . Концентрацией напряжений пренебрегаем. Система координат связана с центром исходного квадрата, ориентация осей традиционна. Предельные напряжения при растяжении и сжатии считаются равными.

Сразу видно, что в расчетных схемах 3 и 5 происходит центральное сжатие, но площадь сечения в схеме 5 меньше. То есть схема 3 в любом случае будет по прочности лучше схемы 5. Поскольку мы ищем оптимальное решение, то схема 5 в дальнейшем не рассматривается.

Можно видеть, что центр тяжести ослабленного сечения в схемах 1 и 4 сместится вверх, в схеме 2 – вверх и вправо, а в схеме 3 – не сместится вовсе. Это значит, что в первом квадранте оба момента, если они есть, будут создавать сжатие, а значит, в функции напряжений

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x - \frac{F}{A} \quad (1)$$

перед первыми двумя слагаемыми, связанными с изгибом, будут стоять минусы.

Для удобства моменты инерции вокруг осей  $x$  и  $y$ , изгибающие моменты вокруг тех же осей и площади сечений сведем в таблицу:

	$I_x$	$I_y$	$M_x$	$M_y$	$A$
	в долях $\frac{a^4}{12}$	в долях $\frac{a^4}{12}$	в долях $F \cdot a$	в долях $F \cdot a$	в долях $a^2$
1	$(1-k)^3$	$1-k$	$\frac{k}{2}$	0	$1-k$
2	$(1-k)^4$	$(1-k)^4$	$\frac{k}{2}$	$\frac{k}{2}$	$(1-k)^2$
3	$(1-2k)^3$	$1-2k$	0	0	$1-2k$
4	$(1-2k)(1-k)^3$	$(1-2k)^3$	$\frac{k}{2}$	0	$(1-2k)(1-k)$

При подстановке этих выражений в формулу (1) получаются зависимости напряжений, линейные относительно координат, но довольно сложные относительно коэффициента  $k$ .

Вторая схема, не симметричная относительно ни одной из осей, кажется самой трудоемкой, но при ближайшем рассмотрении можно заметить, что ослабленное сечение представляет собой квадрат, то есть правильный многоугольник, а значит, все его центральные оси являются главными, и все центральные моменты инерции равны друг другу. Кроме того, моменты  $M_x$  и  $M_y$  также равны, а фигура симметрична относительно оси BC (Рис. 3), и поэтому силовая линия с ней совпадает. А значит, внецентренное сжатие, то есть суперпозицию сжатия и косоугольного изгиба, можно мыслить как суперпозицию сжатия и изгиба прямого. А именно: стержень сжимается силой  $F$ , приложенной в центре ослабленного сечения, точке D, и изгибается моментом, лежащим в плоскости BC.

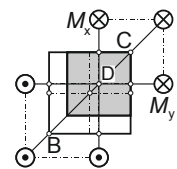


Рис. 3

Величина этого суммарного изгибающего момента равна геометрической сумме (или сумме псевдовекторов)  $M_x$  и  $M_y$ , то есть

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{\left(\frac{k}{2}F \cdot a\right)^2 + \left(\frac{k}{2}F \cdot a\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{k}{2}F \cdot a\right)^2} = \frac{k}{2}F \cdot a\sqrt{2}$$

Опасная точка сечения – С: там сжатие от момента складывается со сжатием от силы. Момент сопротивления изгибу равен

$$W_x = \frac{I_x}{CD} = \frac{a^4(1-k)^4}{12} \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{a^3(1-k)^4}{6\sqrt{2}}$$

и поэтому изгибное напряжение в точке С равно

$$\sigma_{\max}^x = \sigma_C = -\frac{k}{2}F \cdot a\sqrt{2} \frac{6\sqrt{2}}{(1-k)^4 a^3} = -\frac{F}{a^2} \frac{6k}{(1-k)^4}$$

Окончательно, полное напряжение в опасной точке:

$$\sigma = \sigma_{\max}^x + \sigma_z = -\frac{F}{a^2} \frac{6k}{(1-k)^4} - \frac{F}{(1-k)^2 a^2} = -\frac{F}{a^2} \frac{1}{(1-k)^2} \left( \frac{6k}{(1-k)^2} + 1 \right)$$

Для всех остальных расчетных схем от зависимости от обеих координат тоже можно избавиться. В схеме 3, как указывалось, происходит центральное сжатие и можно положить  $x = y = 0$ , а в схемах 1 и 4 следует воспользоваться тем, что ось  $y$  является осью симметрии и поэтому  $M_y = 0$ . Тогда можно сделать вывод о том, что в этих схемах все точки верхней грани сечения (где  $y = \frac{a}{2}$ ) равноопасны, а координата  $x$  может иметь любое значение, например,  $x = 0$ .

С учетом упрощений все четыре функции  $\sigma_{\max}(k)$  выглядят так:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{a^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-k} \left( \frac{3k}{(1-k)^2} + 1 \right) \\ \frac{1}{(1-k)^2} \left( \frac{6k}{(1-k)^2} + 1 \right) \\ \frac{1}{1-2k} \\ \frac{1}{(1-2k)(1-k)} \left( \frac{3k}{(1-k)^2} + 1 \right) \end{bmatrix}$$

Можно показать, что:

- все функции при  $k = 0$  возвращают значение  $-\frac{F}{a^2}$  (центральное сжатие), а затем монотонно убывают;
- при  $k \rightarrow \frac{1}{2}$  напряжения для схем 3 и 4 стремятся к  $-\infty$ , для схемы 1 к напряжению  $-14\frac{F}{a^2}$ , а для схемы 2 к  $-52\frac{F}{a^2}$ ;
- при  $0 < k < 0.25$  расчетные схемы от худшей к лучшей ранжируются следующим образом: 2, 4, 1, 3 (Рис. 4);

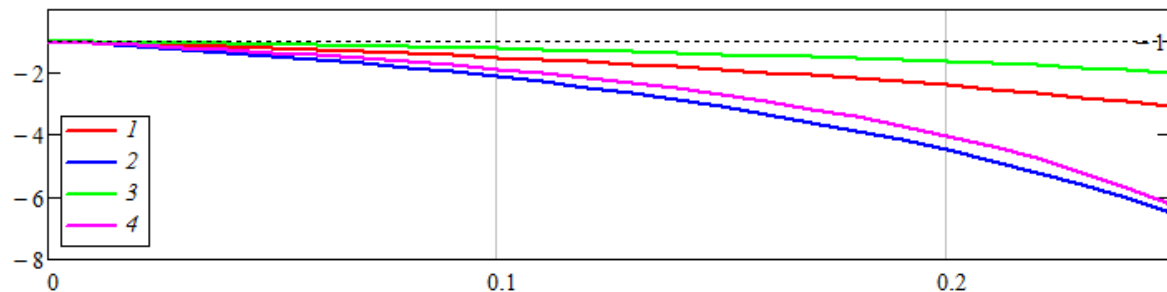


Рис. 4

Однако при некотором большем значении  $k$  оказывается, что схема 2 обеспечивает меньшее по модулю напряжение в опасной точке, чем схема 4 (Рис. 5). Найдем это значение аналитически: вычтем из второй функции четвертую, приведем к общему знаменателю и приравняем числитель нулю:

$$k^2 + 7k - 2 = 0$$

Решив данное уравнение и отбросив его отрицательный корень, получаем  $k_1 = \frac{-7 + \sqrt{57}}{2} \approx 0.275$ .

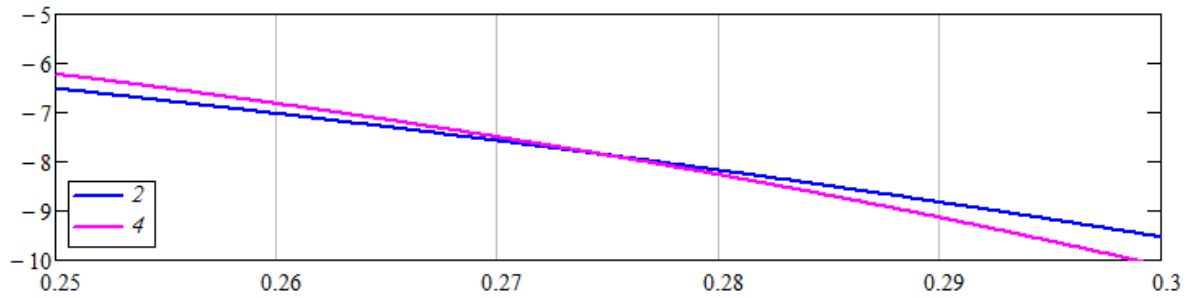


Рис. 5

Расчетные схемы 2 и 4, причем только они, имеют выемки по двум смежным сторонам. Так что задача во второй постановке решена: если необходимо сделать две выемки, глубина которых больше, чем  $k_1 \cdot a$ , то оптимальной является схема 2 (Рис. 1, б), если же глубина меньше, чем  $k_1 \cdot a$ , то следует сделать выемку и с третьей стороны.

Аналогично рассмотрим схемы 2 и 3 (Рис. 6), но решать кубическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 + 13k - 6 = 0$$

приходится численно. Однако корень  $k_2 \approx 0.4894$  вряд ли стоит рассматривать как практически важный: его величина слишком близка к максимально допустимой  $\frac{1}{2}$ .

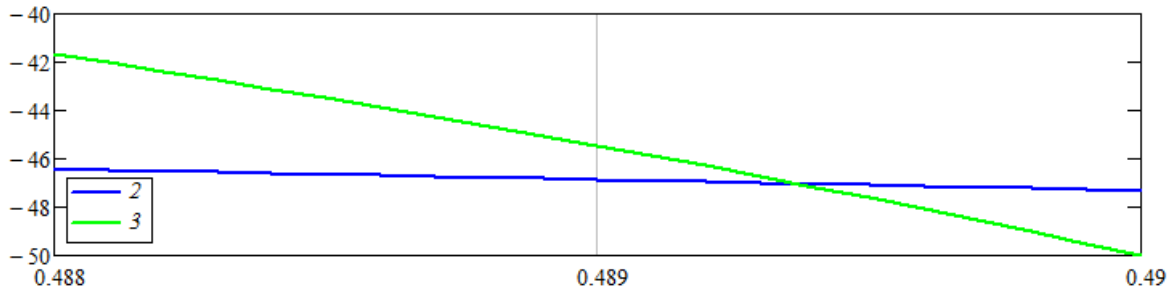


Рис. 6

Аналогично, сравнивая схемы 1 и 3 (Рис. 7) и найдя корень  $k_3 = -2 + \sqrt{6} \approx 0.4495$ , не следует принимать его во внимание.

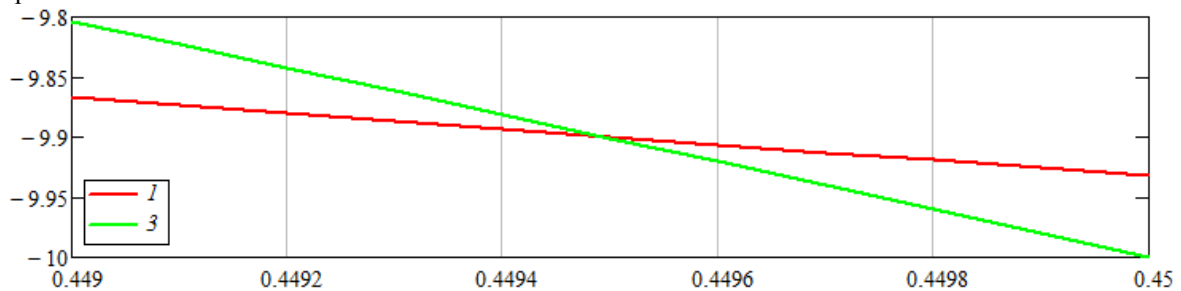


Рис. 7

Можно показать, что больше никакие линии не пересекаются.

Таким образом, игнорируя корни  $k_2$  и  $k_3$ , приходим к выводу, что при необходимости сделать одну выемку, независимо от ее глубины, следует также сделать симметричную выемку с противоположащей стороны колонны.