# Проектирование равнопрочного троса

Данная задача создана на основе задачи №59 [1]. Необходимо спроектировать весомый равнопрочный трос подъемного механизма, то есть стержень, работающий только на растяжение, и имеющий один коэффициент запаса во всех точках. Задачу будем трактовать как проектировочный расчет на прочность с целью поиска площади поперечного сечения троса и/или закона ее изменения по длине. В качестве побочных задач можно сравнить массы тросов и их удлинения по разным расчетным схемам. Заданы:

$l$ – длина троса;

ρ – плотность материала троса;

[σ] – допускаемое напряжение материала троса;

$F$ – вес груза, который должен нести трос.

Первая расчетная схема – трос постоянной площади $A$ поперечного сечения. На нижнее сечение троса действует только сила $F$, на верхние – еще и вес самого троса, равный произведению его объема

$$V = lA \tag{1}$$

на плотность материала и ускорение свободного падения:

$$P = mg = V\rho g = lA\rho g$$

Тогда в верхнем (опасном) сечении троса нормальная сила равна $F + P$. Условие прочности

$$[\sigma] = \frac{F+P}{A} = \frac{F + lA\rho g}{A} = \frac{F}{A} + l\rho g$$

откуда площадь поперечного сечения

$$A = \frac{F}{[\sigma] - l\rho g} \tag{2}$$

Объем троса согласно формуле (1) равен

$$V = \frac{Fl}{[\sigma] - l\rho g} \tag{3}$$

Вторая расчетная схема – относительно равнопрочный ступенчатый трос, подобный описанному в авторском свидетельстве [2] (Рис. 1). Будем для простоты считать, что участки (ступени) равны по длине. Обозначая их количество через $k$ (Рис. 2, *а*), получим длину каждого участка равной $\frac{l}{k}$.

Рассмотрим нижний (первый) участок Рис. 2, *б*. Опасное сечение – верхнее, примыкающее ко второму участку. Пренебрегая концентрацией напряжений на границах участков, находим, что площадь будет определяться по формуле, подобной формуле (2), то есть

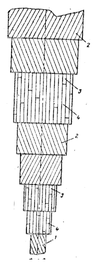

Рис. 1

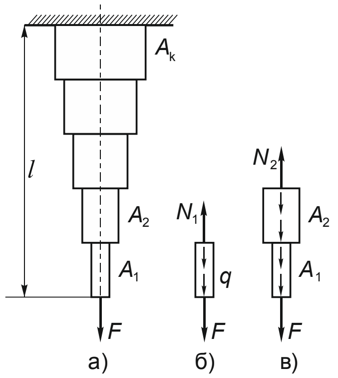


Рис. 2

$$A_1 = \frac{F}{[\sigma] - \frac{l}{k}\rho g}$$

Для второго участка (Рис. 2, *в*) аналогичные рассуждения приводят к формуле

$$A_2 = \frac{F[\sigma]}{\left([\sigma] - \frac{l}{k}\rho g\right)^2}$$

И, наконец, для $i$-го участка

$$A_i = \frac{F[\sigma]^{i-1}}{\left([\sigma] - \frac{l}{k}\rho g\right)^i} = \frac{F}{[\sigma]\left(1 - \frac{\rho g l}{k[\sigma]}\right)^i} \tag{4}$$

Объем троса считается по формуле

$$V = \sum_{i=1}^{k} \frac{l}{k} A_i = \frac{Fl}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{[\sigma]^{i-1}}{\left([\sigma] - \frac{l}{k}\rho g\right)^i} = \frac{Fl}{k[\sigma]} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\left(1 - \frac{l\rho g}{k[\sigma]}\right)^i} \tag{5}$$

В качестве третьей расчетной схемы рассмотрим трос, обладающий не относительной, а абсолютной равнопрочностью (Рис. 3, *а*). По сути дела, им становится ступенчатый трос при стремлении числа участков к бесконечности, причем формула (5) может быть сведена ко второму замечательному пределу.

Выделим малый участок троса и спроецируем силы на вертикаль (Рис. 3, *б*):

$$\sum F(z) = -N + q \cdot dz + N + dN = 0 \to q = -\frac{dN}{dz} \tag{6}$$

Здесь $q$ – нагрузка, вызванная весом троса. Кроме того, из Рис. 3, *б* следует, что

$$q \cdot dz = g \cdot dm = g\rho \cdot dV = g\rho \cdot A \cdot dz \to q = g\rho \cdot A \qquad (7)$$

Исходя из условия абсолютной равнопрочности, запишем условие прочности в произвольном сечении троса:

$$\sigma = \frac{N}{A} = [\sigma] \to N = [\sigma]A \qquad (8)$$

Отсюда и из формулы (6) следует

$$q = -[\sigma]\frac{dA}{dz}$$

что с учетом формулы (7) после преобразований приводит к

$$\frac{dA}{A} = -\frac{\rho g}{[\sigma]}dz$$

Интегрируя, получаем

$$\ln A = -\frac{\rho g}{[\sigma]}z + C$$

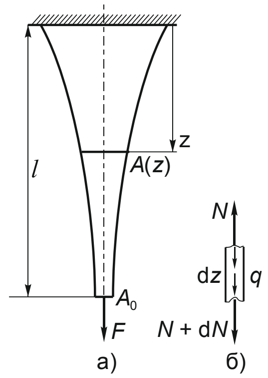

Рис. 3

Для определения константы $C$ сформулируем граничное условие на нижнем конце троса: при

$$z = l \;\; A = \frac{F}{[\sigma]} \to C = \frac{\rho g}{[\sigma]}l + \ln\frac{F}{[\sigma]} \to \ln A = \ln\frac{F}{[\sigma]} + \frac{\rho g}{[\sigma]}(l - z)$$

И, окончательно, потенцируя, получаем

$$A = \frac{F}{[\sigma]}\exp\left[\frac{\rho g}{[\sigma]}(l - z)\right]$$

Объем равнопрочного троса ищется по формуле

$$V = \int_0^l A \cdot dz = \frac{F}{\rho g}\exp\left(\frac{\rho g l}{[\sigma]} - 1\right) \qquad (9)$$

Для сравнения объемов тросов по трем расчетным схемам (формулы (3), (5) и (9) соответственно) необходимо задаться числовыми исходными данными. Затем, найдя объем, пересчитываем его в массу. Примем:

$l$ = 200 м; $\rho$ = 7.8 $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ (сталь), $[\sigma]$ = 200 МПа, $F$ = 10 кН. Кроме того, возьмем 5 участков для второй расчетной схемы, как это сделано в [1]. Массу троса легче всего, избежав вычисления объема, найти из условия прочности для верхнего сечения: $\frac{F+P}{A_B} = [\sigma]$, откуда следует: $m = \frac{A_B[\sigma] - F}{g}$.

Массы тросов будут составлять 84.5, 81.7 и 81 кг соответственно. Как и следовало ожидать, абсолютно равнопрочная конструкция оказалась оптимальной с точки зрения эффективности использования материала, а неравнопрочный трос постоянной площади – самым тяжелым, потому что нижние сечения троса недогружены. Разумеется, ступенчатый трос занимает промежуточное положение. Однако разница в массе между лучшей и худшей конструкциями составляет всего 4.1%. Учитывая, что трос переменного сечения (Рис. 3, *а*) обладает крайне низкой технологичностью, можно сделать вывод о том, что применение равнопрочной конструкции в данном случае нецелесообразно.

Теперь выполним расчет на жесткость. Для троса постоянного поперечного сечения (Рис. 4), используя формулу (2), получаем

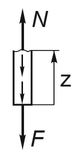

Рис. 4

$$\Sigma F_z = N - qz - F = N - \rho g A \cdot z - F = 0 \to N = \rho g A \cdot z + F$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Ndz}{EA} = \frac{1}{E}\left[\rho g\frac{z^2}{2} + \frac{F}{A}\right]\Bigg|_0^l = \frac{l}{E}\left([\sigma] - \frac{\rho g l}{2}\right)$$

Для $i$-го участка ступенчатого троса имеем расчетную схему Рис. 5, где $P_{i-1}$ – вес нижележащих участков, нормальная сила на стыке $i$-го и ($i$ + 1)-го участков ищется из условия относительной равнопрочности, то есть $N_i = A_i[\sigma]$, а интенсивность распределенной весовой нагрузки выражается формулой $q_i = A_i\rho g$.

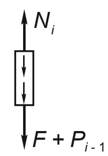

Рис. 5

Отсюда, с учетом формулы (4), после преобразований выводим

$$\Delta l = \frac{l}{kE}\sum_{i=1}^{k}\frac{\dfrac{\rho g l}{k}\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\left(1 - \dfrac{\rho g l}{k[\sigma]}\right)^j} + F}{\dfrac{F}{\left(1 - \dfrac{\rho g l}{k[\sigma]}\right)^i}} + \frac{\rho g l}{2k}$$

Для равнопрочного троса с учетом зависимости (8) формула удлинения получается гораздо проще:

$$\Delta l = \frac{[\sigma]}{E}l$$

Подставляя исходные данные, вычисляем удлинения трех тросов: 192, 198 и 200 мм, соответственно, то есть равнопрочный трос оказался самым податливым, хотя разница между ним и тросом постоянного поперечного сечения составляет те же 4.1%.

**Литература**

1. Тимошенко С. П., Сборник задач по сопротивлению материалов, М.-Л., Государственное издательство, 1930
2. Авторское свидетельство № SU337040A1