Задача № 5.1.

1. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры Q_y и M_x;
2. Определить допускаемую нагрузку, приняв коэффициент запаса по текучести $[n_т] = 2,5$;
3. Изобразить примерный вид упругой линии балки.

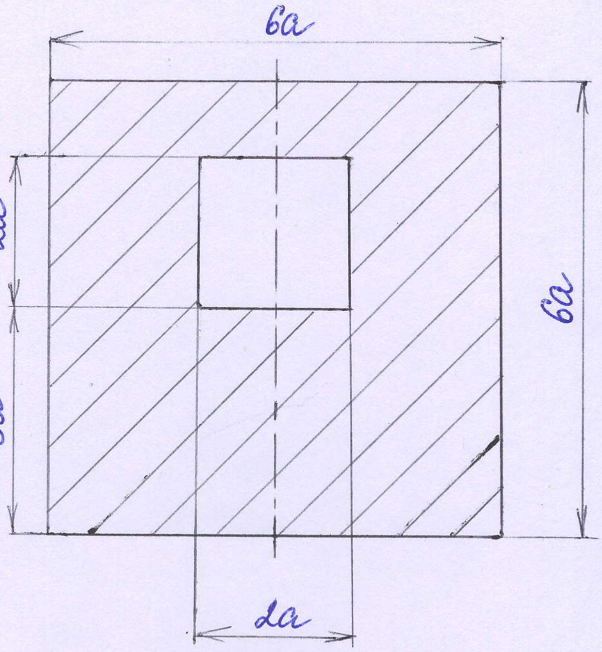
Материал балки – идеально упругий (малоуглеродистая сталь): $\sigma_{т.р} = \sigma_{т.сж.} = 300$ МПа.

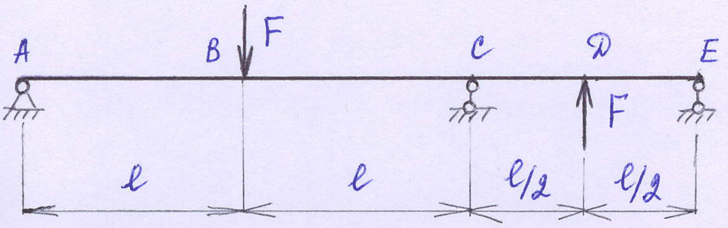
Дано: $[n_т] = 2,5$

$\ell = 2$ м $= 2 \cdot 10^3$ мм

$a = 30$ мм

$\sigma_т = 300$ МПа

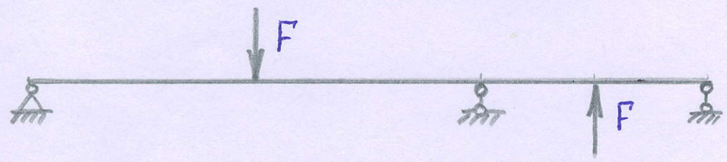


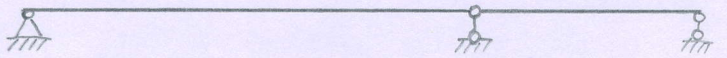


Найти: F

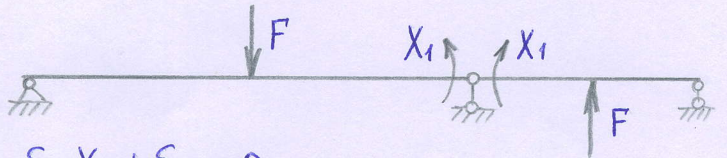
Решение:

1. 4 неизвестных, 3 уравнения ⇒ балка единожды статически неопределима.



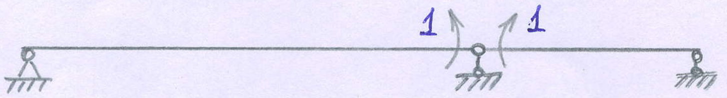


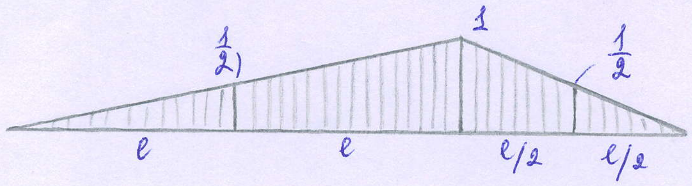
ОС



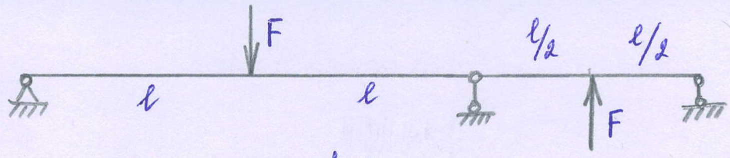
ЭС

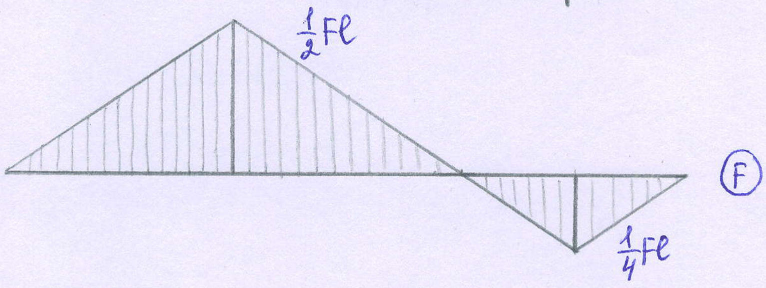
$\delta_{11} X_1 + \delta_{1F} = 0$





1





$$\delta_{11} = (1)\times(1) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot \cancel{2}l\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot l\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}l + \frac{1}{3}l = l$$

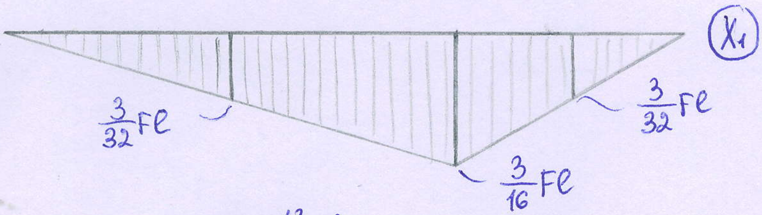
$$\delta_{1F} = (1)\times(F) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}Fl + \frac{l}{6}\left[\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}Fl + 1\cdot\frac{1}{2}Fl\right] +$$

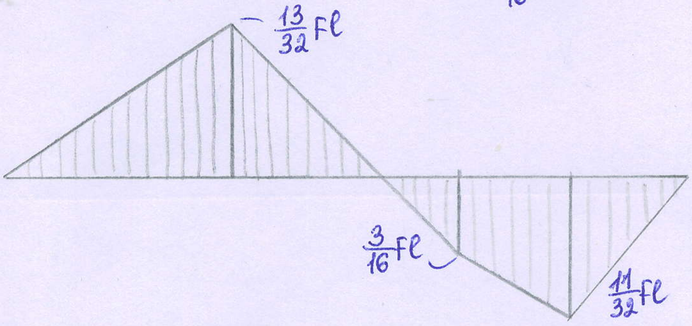
$$+\frac{l}{12}\left[-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{4}Fl - 1\cdot\frac{1}{4}Fl\right] + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}Fl\right) = \frac{1^{4}}{12}Fl^2 + \frac{1^{8}}{6}Fl^2 -$$

$$-\frac{1^{2}}{24}Fl^2 - \frac{1}{48}Fl^2 = \frac{1}{48}(4+8-2-1)Fl^2 = \frac{9}{48}Fl^2 = \frac{3}{16}Fl^2$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = 0$$

$$l\cdot X_1 + \frac{3}{16}Fl^2 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{3}{16}Fl$$





Σ рис 1.

Сделаем проверку:

$$(\Sigma)\times(1) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{13}{32}Fl + \frac{l}{6}\left[\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{13}{32}Fl - 2\cdot\frac{3}{16}Fl - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16}Fl + \frac{13}{32}Fl\right] +$$

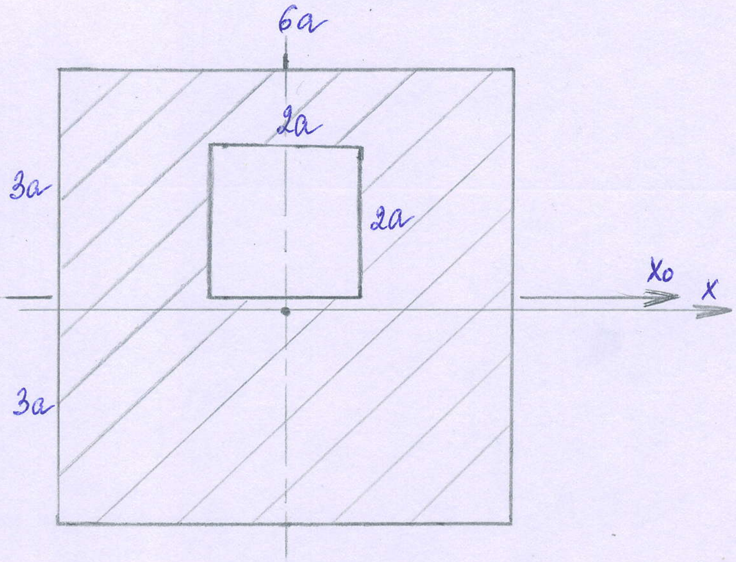
$$+\frac{l}{12}\left[-2\cdot\frac{3}{16}Fl - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{11}{32}Fl - \frac{11}{32}Fl - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{16}Fl\right] + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left(-\frac{11}{32}Fl\right) =$$

$$= \frac{13^{12}}{6\cdot 32}Fl^2 + \frac{l}{6}\left[\frac{13}{32} - \frac{6\cdot 2}{32} - \frac{3}{32} + \frac{13}{32}\right]Fl + \frac{l}{12}\left[-\frac{12}{32} - \frac{11}{32} - \frac{11}{32} - \frac{3}{32}\right]Fl -$$

$$-\frac{11}{12\cdot 32}Fl^2 = \frac{15}{12\cdot 32}Fl^2 + \frac{Fl^2}{6}\cdot\frac{11}{32} - \frac{Fl^2}{12}\cdot\frac{37}{32} = \frac{15+22-37}{12\cdot 32}Fl^2 = 0$$

Проверка сошлась.

2. Найдем геометрические характеристики поперечного сечения.



$$S_{x_0} = \cancel{3a\cdot 6a\cdot \tfrac{3}{2}a} - \cancel{3a\cdot 6a\cdot \tfrac{3}{2}a} - 2a\cdot 2a\cdot a = -4a^3$$

$$A = 6a\cdot 6a - 2a\cdot 2a = (36-4)a^2 = 32a^2$$

$$y_c^{x_0} = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{-4a^3}{32a^2} = -\frac{1}{8}a$$

$$I_{x_0} = \frac{1}{3}\left(2\cdot 6a\cdot(3a)^3 - 2a\cdot(2a)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\cdot 12\cdot \overset{9}{\cancel{27}}a^4 - \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 8a^4 = \frac{308}{3}a^4$$

$$I_x = I_{x_0} - A\cdot\left(y_c^{x_0}\right)^2 = \frac{308}{3}a^4 - 32a^2\cdot\left(-\frac{1}{8}a\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{308}{3}^{\backslash 2} - \frac{1}{2}^{\backslash 3}\right)a^4 = \frac{613}{6}a^4$$

$$y_{max} = 3a + \frac{1}{8}a = \frac{25}{8}a$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{613\cdot a^4\cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_3\cdot 25\cdot a} = \frac{2452}{75}a^3.$$

3. Выполним расчет на прочность:

$$[n_T] \le n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{max}}, \quad \text{где} \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x}.$$

$M_{max} = \frac{13}{32}Fl$, опасное сечение B.

$$[n_T] \le \frac{\sigma_T\cdot W_x}{M_{max}}$$

$$[n_T] \le \frac{\sigma_T\cdot 2452\cdot a^3\cdot 32}{75\cdot 13\cdot F\cdot l} \Rightarrow F \le \frac{\sigma_T\cdot 2452\cdot a^3\cdot 32}{75\cdot 13\cdot l\cdot [n_T]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \le \frac{\cancel{300}\cdot 2452\cdot (30)^3\cdot \cancel{32}^{16}}{\cancel{75}_{25}\cdot 13\cdot \cancel{2}\cdot 10^{3}\cdot 2{,}5} = 130370{,}95\ Н$$

4. Примерный вид изогнутой оси балки.

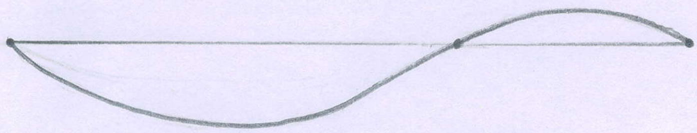


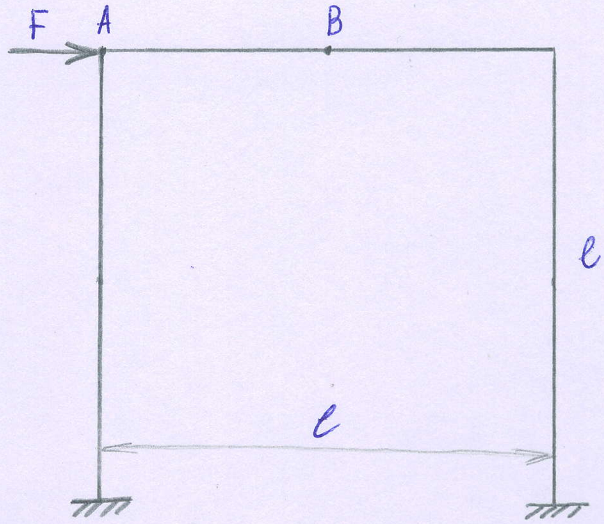
рис. 2

Результаты: суммарная эпюра – рис. 1; геометрические характеристики поперечного сечения: $I_x = \frac{613}{6}a^4$, $W_x = \frac{2452}{75}a^3$; $M_{max} = \frac{13}{32}Fl$, опасное сечение – B; допускаемая нагрузка $F \le 130$ кН; примерный вид изогнутой оси – рис. 2.

Задача № 5.2.

1. Раскрыть статическую неопределимость и построить эпюру $M_{изг}$.
2. Найти горизонтальное перемещение сечения A.
3. Проверить полученное решение.
4. Объяснить, почему вертикальное перемещение сечения B равно нулю.

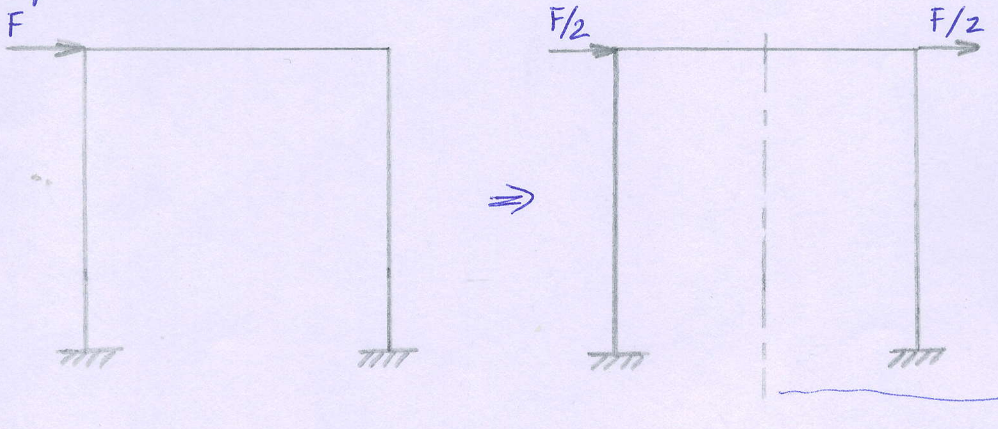
Дано: $EI = const$



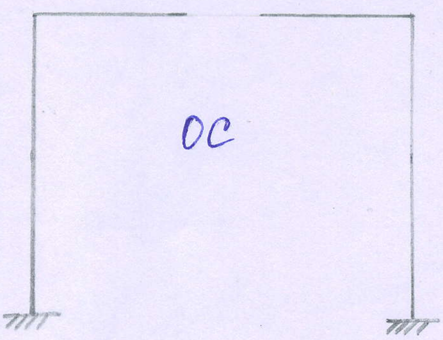
Решение:

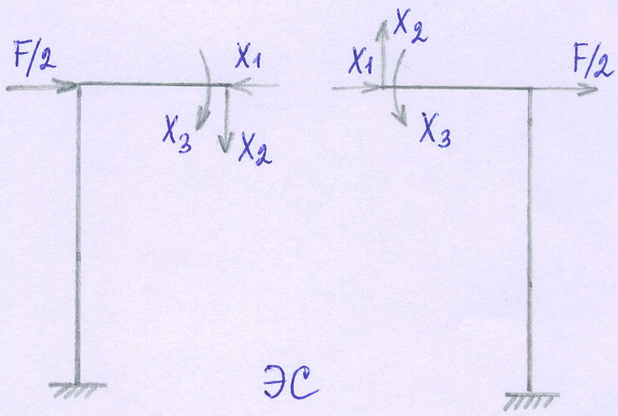
1) 6 неизвестных, 3 уравнения ⇒ рама трижды статически неопределима.

Воспользуемся приемом переноса силы:

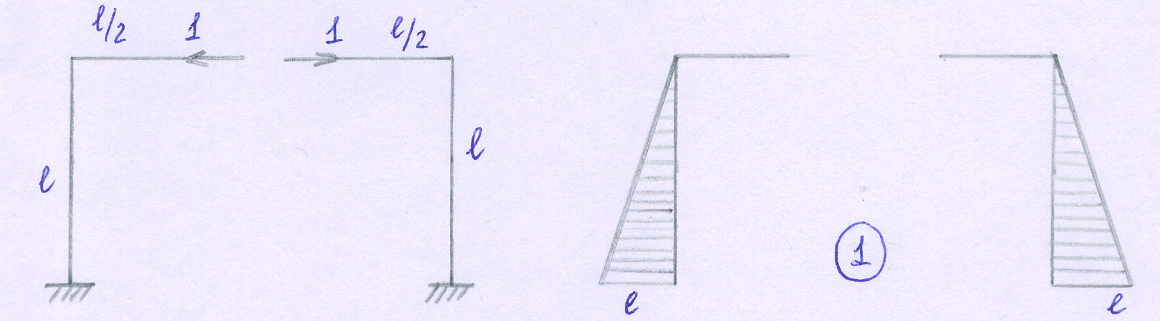


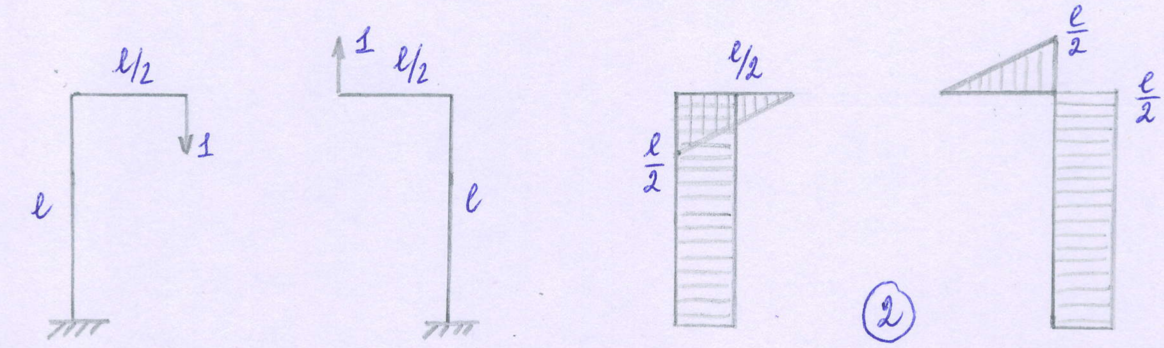
получаем раму с осью косой симметрии

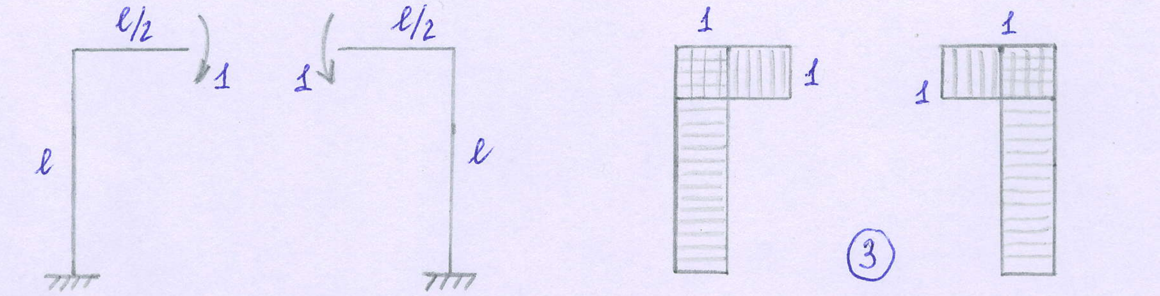


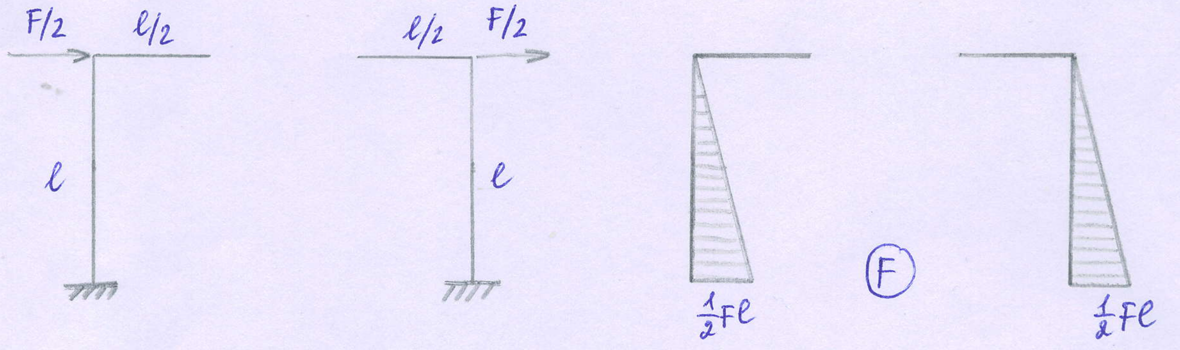


$$(1)\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2F} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3F} = 0 \end{cases}$$









$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{1F} = \delta_{3F} = 0 \quad \text{(из эпюр)}$$

$$(1) \to \begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 = 0 \\ \delta_{22} X_2 + \delta_{2F} = 0 \qquad (2) \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 = 0 \end{cases}$$

$X_1 = X_3 = 0$ (как прямосимметричные силовые факторы в задаче с косой симметрией),

$$(2) \to X_2 = -\frac{\delta_{2F}}{\delta_{22}} \implies X_2 = -\frac{F\cancel{l^3}\cdot 12^3}{4\cdot 7\cancel{l^3}} = -\frac{3}{7}F$$

$$\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\cdot l\cdot\frac{l}{2}\right) = \frac{\cancel{2}l^3}{\cancel{2}\cdot 12} + \frac{\cancel{2}l^{3\,|6}}{\cancel{2}\cdot 2} = \frac{7}{12}l^3$$

$$\delta_{2F} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Fl\cdot l\cdot\frac{l}{2}\right)\cdot 2 = \frac{1}{4}Fl^3$$

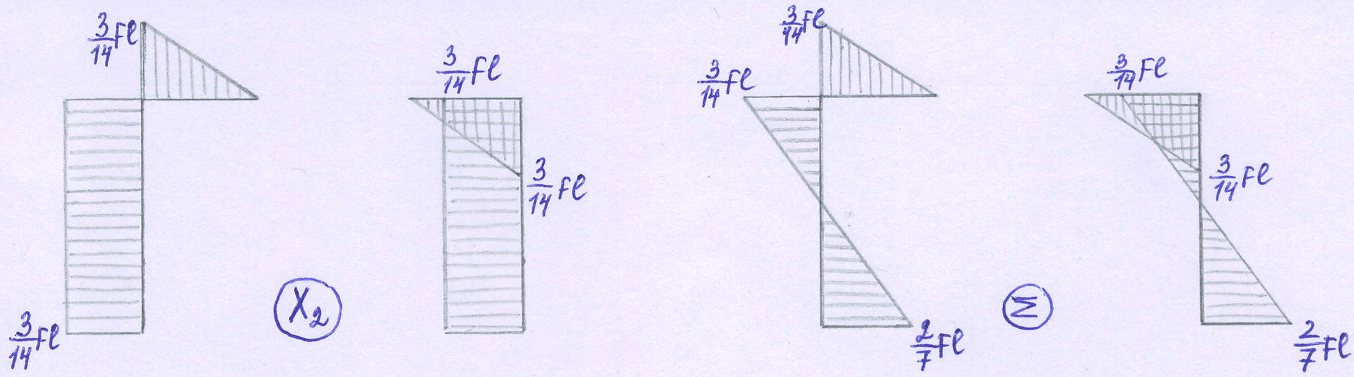


рис. 1.

Выполним проверку:

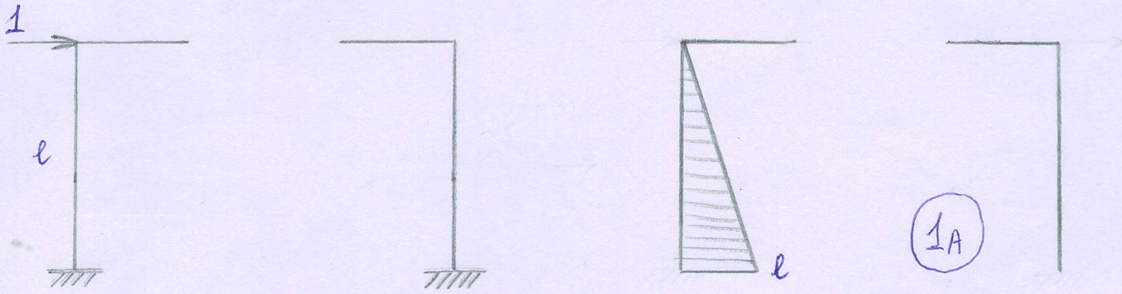
$$\Sigma \times 2 = \frac{l}{6}\Big[\cancel{2}\cdot\frac{2}{7}Fl\cdot\frac{l}{\cancel{2}} - \cancel{2}\cdot\frac{3}{14}Fl\cdot\frac{l}{\cancel{2}} + \frac{2}{7}Fl\cdot\frac{l}{2} - \frac{3}{14}Fl\cdot\frac{l}{2}\Big]\cdot 2 +$$

$$+ \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot\frac{l}{\cancel{2}}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\Big(-\frac{\cancel{3}}{14}Fl\Big)\cdot\cancel{2} = \frac{l}{6}\Big[\frac{2}{7}Fl^2 - \frac{3}{14}Fl^2 + \frac{1}{7}Fl^2 - \frac{3}{28}Fl^2\Big]\cdot 2 -$$

$$- \frac{1}{28}Fl^3 = \frac{l}{3}\Big[\frac{3}{7}Fl^2 - \frac{3}{14}Fl^2 - \frac{3}{28}Fl^2\Big] - \frac{1}{28}Fl^3 = \frac{12-6-3}{3\cdot 28}Fl^3 - \frac{1}{28}Fl^3 =$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 28}Fl^3 - \frac{1}{28}Fl^3 = 0.$$ Проверка сошлась.

2) Найдем горизонтальное перемещение сечения A.



$$EIx_A = \frac{l}{6}\Big[2\cdot l\cdot\frac{2}{7}Fl - l\cdot\frac{3}{14}Fl\Big] = \frac{l}{6}\Big[\frac{8}{14}Fl^2 - \frac{3}{14}Fl^2\Big] = \frac{5}{84}Fl^3 \qquad (\Sigma \times 1_A)$$

$$x_A = \frac{5}{84}\frac{Fl^3}{EI}$$ (вправо)

3) Вертикальное перемещение точки B – симметричный кинематический фактор. Данная в задаче рама – кососимметричная конструкция. Вертикальное перемещение точки B равно нулю, т.к. все симметричные кинематические факторы в задачах с косой симметрией обращаются в нуль.

<u>Результаты:</u> суммарная эпюра – рис. 1; горизонтальное перемещение сечения A равно $\frac{5}{84}\frac{Fl^3}{EI}$ (вправо).