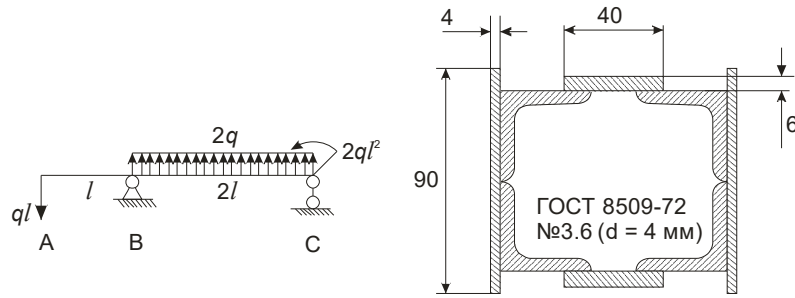


Изгиб балки



- 1) Построить эпюры Q_y и M_x ;
- 2) Определить величину нагрузки q при $l = 500$ мм, $\sigma_{\text{TP}} = \sigma_{\text{TC}} = 300$ МПа, $[n_T] = 2$;
- 3) Определить угловое перемещение сечения В, ϑ_B ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа);
- 4) Нарисовать примерный вид изогнутой оси балки.

1) Построение эпюр внутренних силовых факторов.

Отбросим связи, заменяя их реакциями:

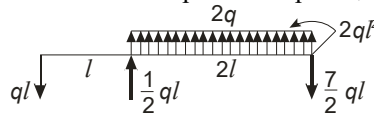
$$\sum F_y = -ql + R_1 + 2q \cdot 2l + R_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = -ql \cdot l - 2q \cdot 2l \cdot l - 2ql^2 - R_2 \cdot 2l = 0 \quad (2)$$

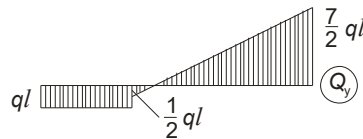
Из уравнения (2) получаем:

$$R_2 = \frac{1}{2}ql(-1-4-2) = -\frac{7}{2}ql, \text{ откуда с учетом (1) следует: } R_1 = ql - 4ql - R_2 = ql \left(1 - 4 + \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}ql$$

Расчетная схема с учетом истинных величин и направлений реакций имеет вид:



Строим эпюру поперечной силы:



Видно, что на участке ВС сила меняет знак, то есть эпюра M_x будет иметь экстремум. Найдем его из условия $Q_y = 0$:

$$\sum F_y = -ql + \frac{1}{2}ql + 2q \cdot z_2 = 0 \rightarrow z^* = z_2 = -\frac{l}{2} \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{l}{4}$$

$$\sum M_D = -ql(l + z^*) + \frac{1}{2}ql \cdot z^* + 2q \cdot z^* \cdot \frac{z^*}{2} - M_x^* = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_x^* = q \left[-l(l + z^*) + \frac{1}{2}l \cdot z^* + z^{*2} \right] =$$

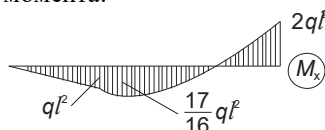
$$= q \left[-l \left(l + \frac{l}{4} \right) + \frac{1}{2}l \cdot \frac{l}{4} + \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right] = ql^2 \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) =$$

$$= \frac{-20 + 2 + 1}{16} ql^2 = -\frac{17}{16} ql^2$$

Найдем максимальный момент и его координату (опасное сечение):

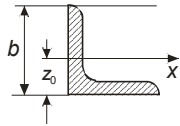
$$M_{\text{max}} = \max(M_C, |M_D|) = \max \left(2ql^2, \frac{17}{16} ql^2 \right) = 2ql^2; \quad z_{\text{max}} = 3l \quad (3)$$

Опасное сечение – С. Строим эпюру момента:



2) Геометрические характеристики поперечного сечения

Рассмотрим левый нижний уголок



$$I_x^L = J_x + A(b - z_0)^2$$

Данные из ГОСТ:

$$b = 36 \text{ мм}, J_x = 3.29 \text{ см}^4 = 3.29 \cdot 10^4 \text{ мм}^4, A = 2.75 \text{ см}^2 = 275 \text{ мм}^2, z_0 = 1.04 \text{ см} = 10.4 \text{ мм}$$

Для всего сечения

$$I_x = 4I_x^L + 2 \cdot \frac{4 \cdot 90^3}{12} + 2 \left[\frac{40 \cdot 6^3}{12} + 40 \cdot 6 \cdot \left(36 + \frac{6}{2} \right)^2 \right] = 4 \left[3.29 \cdot 10^4 + 275(36 - 10.4)^2 \right] +$$

$$+ 2 \left[\frac{90^3}{3} + \frac{10 \cdot 6^3}{3} + 40 \cdot 6 \cdot 39^2 \right] = 4(32900 + 180224) + 2(243000 + 720 + 365040) =$$

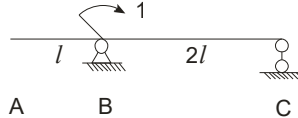
$$= 852496 + 1217520 = 2.07 \cdot 10^6 \text{ мм}^4$$

$$y_{\max} = \frac{90}{2} = 45 \text{ мм}; \quad W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = 46000 \text{ мм}^3$$

3) Расчет на прочность

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{2ql^2}{W_x} \rightarrow q = \frac{\sigma_T \cdot W_x}{2l^2 n_T} = \frac{300 \cdot 46000}{2 \cdot 500^2 \cdot 2} = 13.8 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$$

4) Расчет на жесткость методом Верещагина

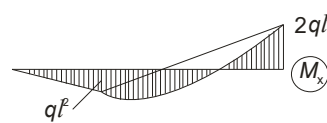


$$EI_x \vartheta_B = M_x \otimes M_1 = \frac{2l}{6} \left[1 \cdot (-2 \cdot ql^2 + 2ql^2) \right] - \frac{1}{12} \cdot 2q \cdot (2l)^3 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 0 - \frac{8}{12} ql^3 = -\frac{2}{3} ql^3$$

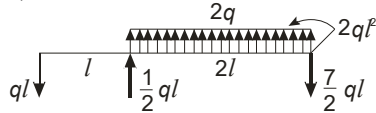


Знак «минус» говорит о том, что выбранное направление (по часовой стрелке) не соответствует действительности.



$$\vartheta_B = \frac{2}{3} \frac{ql^3}{EI_x} \text{ (против часовой стрелки)}$$

5) Расчет на жесткость методом Коши-Крылова



$$M_x = -qlz + H(z-l) \cdot \frac{1}{2} ql \cdot (z-l) + H(z-l) \cdot 2q \frac{(z-l)^2}{2}$$

$$EI_x \vartheta = -ql \frac{z^2}{2} + H(z-l) \cdot \frac{1}{2} ql \cdot \frac{(z-l)^2}{2} + H(z-l) \cdot 2q \frac{(z-l)^3}{6} + C_1$$

$$EI_x v = -ql \frac{z^3}{6} + H(z-l) \cdot \frac{1}{2} ql \cdot \frac{(z-l)^3}{6} + H(z-l) \cdot 2q \frac{(z-l)^4}{24} + C_1 z + C_2$$

Граничные условия:

$$1) z = l, v = 0 \rightarrow -ql \frac{l^3}{6} + C_1 l + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = ql \frac{l^3}{6} - C_1 l$$

$$2) z = 3l, v = 0 \rightarrow -ql \frac{(3l)^3}{6} + \frac{1}{2} ql \cdot \frac{(2l)^3}{6} + 2q \frac{(2l)^4}{24} + C_1 \cdot 3l + C_2 = 0$$

$$ql^4 \left(-\frac{27}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{6} + 2 \frac{16}{24} \right) + C_1 \cdot 3l + C_2 = 0 \rightarrow -\frac{5}{2} ql^4 + C_1 \cdot 3l + C_2 = 0 \rightarrow -\frac{5}{2} ql^4 + C_1 \cdot 3l + ql \frac{l^3}{6} - C_1 l = 0$$

$$-\frac{7}{3} ql^4 + 2l \cdot C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \frac{7}{6} ql^3 \rightarrow C_2 = ql \frac{l^3}{6} - \frac{7}{6} ql^3 \cdot l = -ql^4$$

$$\text{Константы интегрирования равны: } C_1 = \frac{7}{6} ql^3; \quad C_2 = -ql^4$$

Функция угла поворота касательной:

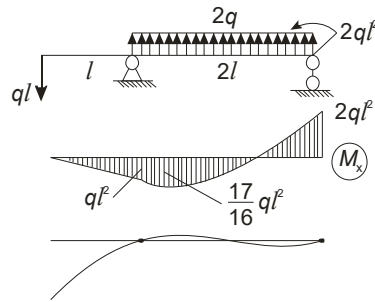
$$\vartheta = \frac{1}{EI_x} \left[-ql \frac{z^2}{2} + H(z-l) \cdot \frac{1}{2} ql \cdot \frac{(z-l)^2}{2} + H(z-l) \cdot 2q \frac{(z-l)^3}{6} + \frac{7}{6} ql^3 \right]$$

$$\vartheta_B = \vartheta(l) = \frac{1}{EI_x} \left[-ql \frac{l^2}{2} + \frac{7}{6} ql^3 \right] = \frac{2}{3} \frac{ql^3}{EI_x} \text{ (против часовой стрелки)}$$

Результаты, полученные методами Верещагина и Коши-Крылова, равны. Проверка сошлась. Подставив найденные значения момента инерции и интенсивности распределенной нагрузки, получаем:

$$\vartheta_B = \frac{2}{3} \frac{ql^3}{EI_x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{13.8 \cdot 500^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 2.07 \cdot 10^6} = 0.0028 = 0.16^\circ \text{ (против часовой стрелки)}$$

6) Примерный вид изогнутой оси:



7) Результаты:

$$q = 13.8 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$$

$$\vartheta_B = \frac{2}{3} \frac{ql^3}{EI_x} = 0.16^\circ \text{ (против часовой стрелки)}$$

Опасное сечение – С.