Анти-образец
или
Как не надо оформлять работы по сопротивлению материалов

Один из преподавателей нашей кафедры составил сборник, выглядящий как материал для онлайн-семинаров (презентаций), где скрупулезно собрал большинство самых распространенных студенческих ошибок, причем весьма разнообразных: в орфографии, пунктуации, оформлении, обозначениях, терминах, логике, вычислениях, методике, последовательности изложения, и т. д.

Начнем с ошибок в оформлении и рассмотрим для примера фрагмент одного из слайдов (Рис. 1). На нем используется по меньшей мере девять различных цветов, помимо основных: белого (фон) и черного (текст). Такое «попугайское» оформление резко снижает качество восприятия текста. Как отмечается в [1], цвет «не несет никакой функциональной нагрузки и только отвлекает от информации». Если все же применять разноцветные шрифты, то «рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовка, один для текста» [2]. Кроме того, «Серьезные презентации не должны быть пестрыми, содержать яркие, ’’ядовитые’’ цвета» [3], а на Рис. 1 почти все цвета именно «ядовиты»: зеленый, синий, красный, фиолетовый…

Рис. 1

При этом совсем не ясно, по какому принципу цвета применяются. Например, красный цвет используется и для обозначения интенсивности распределенной нагрузки q, и для векторов, и для слово «реакция», и для обозначения реакции в тексте, и для уравнений равновесия – почему именно так? Красный цвет, один из самых «сильных» по психологическому воздействию на зрителя, вообще рекомендуется использовать как можно реже и только для объектов, заслуживающих особого внимания [3].

Но дело, разумеется, не только в цветах. Буква A используется для обозначения и сечения, и площади. Правило, которое следует соблюдать неукоснительно: для разных объектов должны использоваться разные обозначения! Правда, это нарушение не слишком серьезно в данном случае, потому что буквы, обозначающие сечения (в том числе A), в дальнейшем никак не используются (хотя тогда зачем было их вводить, затрудняя восприятие рисунка?).

Далее, на расчетной схеме над стандартной линией со стрелками на концах, используемой для обозначения размера, указана не только длина, но и площадь поперечного сечения, и даже модуль Юнга, к размерам тела вообще никакого отношения не имеющий.

К какому рисунку относится п. 1 и уравнение в нем (Рис. 2)? Ответить на этот вопрос трудно сразу по двум причинам: во-первых, рисунки не снабжены номерами. С этим, учитывая небольшое число рисунков, еще можно смириться. Но главное, во-вторых, нарушена логика. Если уравнение для реакции относится к первому рисунку (постановка задачи), то никакой реакции R_A на нем нет и быть не может, поэтому и уравнение, видимо, записано на основе второго рисунка. Но на нем уже бездоказательно написано, что $R_A = ql$. Откуда это следует? Очевидно, из уравнения. Но, когда составлялось уравнение, ни модуль, ни направление реакции еще не были известны.

Надо поступать так: отбрасывать связи (в данном случае одну связь), заменять их пока неизвестными реакциями, введя в рассмотрение обозначение R_A, и только потом записывать уравнения равновесия. Затем, решив их, найти модули и направления реакций. После чего с полным основанием можно изображать безопорную расчетную схему, показанную на втором рисунке. Тогда он станет третьим.

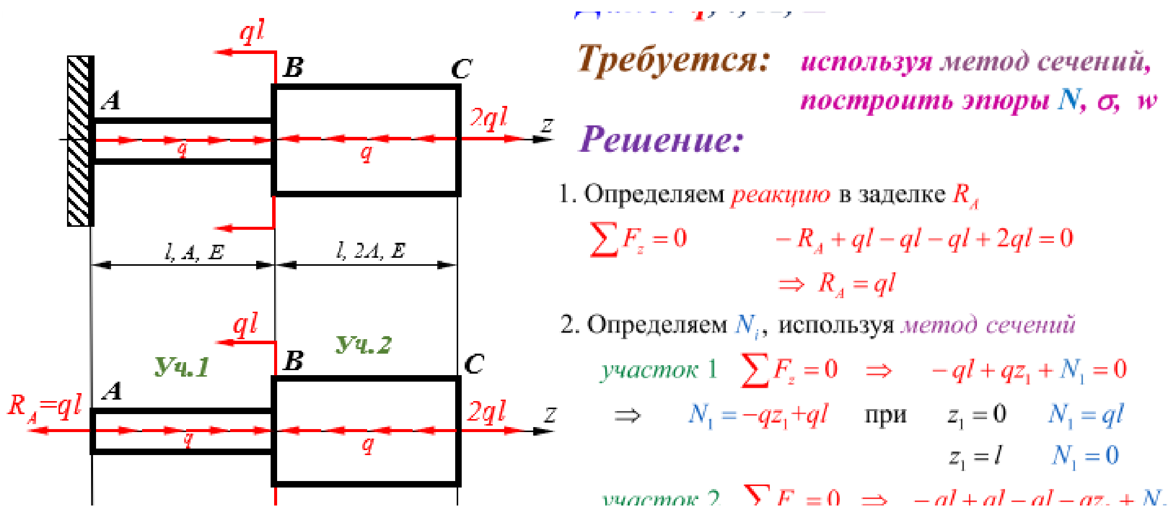


Рис. 2

Переходим к п. 2. В нем использовано обозначение N_i, где следовало бы ввести переменную i (номер участка), например, так: $i = 1, 2$.

На участке 2 присутствуют три одинаковых слагаемых, равных по модулю ql: первое – от реакции (направо, то есть с минусом) второе – от распределенной нагрузки (с плюсом), и третье – от внешней сосредоточенной силы (с минусом). Математически все верно, однако следовало бы указать (не словами, так хоть обозначениями), что второе слагаемое – сосредоточенная равнодействующая, равная

$$F = \int_0^l q\,dz = q \cdot z\Big|_0^l = q \cdot l$$

То есть, иными словами, данная величина получена в результате умножения интенсивности распределенной нагрузки на длину участка, поэтому именно так, со знаком умножения ($q \cdot l$) ее и следует записывать.

В Задаче №2, проведя проверку, автор пишет «Проверка сошлась. Задача решена правильно». Последнюю фразу следует признать потенциально очень опасной, прежде всего с точки зрения надежности расчета. У студента, то есть будущего инженера, исподволь создается ощущение, что <u>любая сошедшаяся проверка гарантирует правильность результата</u>. Тогда, выполняя расчет уже не учебный, а практический, и проведя простенькую проверку, он будет категорично утверждать, что его решение правильно и безошибочно.

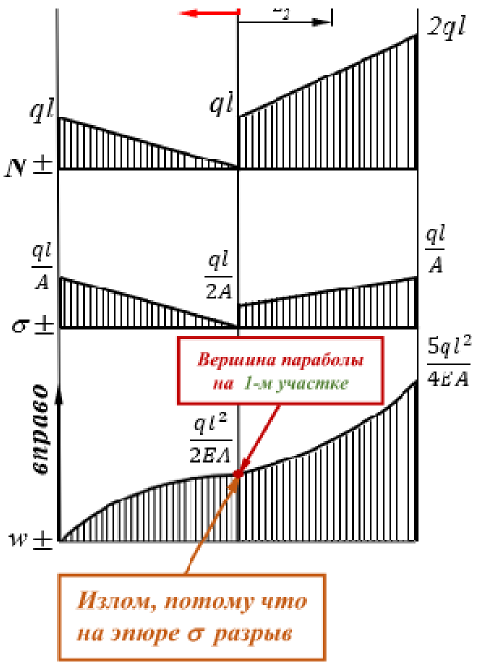
Во-первых, все проверки имеют разную степень надежности. Есть довольно сложные и трудоемкие методики оценки этой надежности, поэтому в основном приходится полагаться на физическую и математическую сущности каждой проверки, собственные опыт, чутье и интуицию.

Во-вторых, любая, сколь угодно надежная проверка, имеет надежность ниже 100%. Абсолютно надежных, то есть дающих полную гарантию верности ответа – нет, не было и быть не может. Поэтому, если ответственность расчета высока, проводят несколько проверок, от самой простой до самой сложной. Не стоит забывать, что при проведении любой проверки тоже можно совершить ошибку. И тогда, если проверка не сошлась, мы начинаем «ловить черную кошку в темной комнате», выискивая ошибки там, где их нет, и попусту расходуем время и силы, вместо того, чтобы провести еще хотя бы одну проверку. А если проверка сошлась, но и она, и основное решение содержали ошибки (самый опасный случай!), мы самоуверенно заявляем, что задача решена верно. Поэтому лучше ограничиваться нейтральной фразой «Проверка сошлась».

Переходим к п. 4 (Рис. 3). Первая формула если и имеет смысл, то с обширными комментариями. Прежде всего, надо уточнить, что она верна только в пределах упругости. Но даже если и заменить подынтегральное выражение на деформацию, то выходит, что перемещение вводится через деформацию, а ведь дело обстоит наоборот [4]. Строго говоря, формула должна иметь вид

$$w = \int_0^z \frac{N}{EA} dz + C \qquad (1)$$

Хотя обычно перемещение вводится по здравому смыслу с расчетом на то, что читатель помнит школьный курс физики. Более того, функция w задается в определенных осях, а напряжение и уж тем более модуль упругости от систем координат не зависят.



участок 2 $\sigma_2 = \frac{q}{2A}(z_2 + l)$ при $z_2 = 0$ $\sigma_2 = \frac{ql}{2A}$

$z_2 = l$ $\sigma_2 = \frac{ql}{A}$

4. Определяем $w_i = \int\limits_{z_i} \frac{\sigma_i}{E}\, dz_i$

Известное граничное условие $w_A = 0$

$$w_1 = w_A + \int\limits_{z_1} \frac{\sigma_1 dz_1}{E} = \int\limits_{z_1} \frac{(-qz_1 + ql)dz_1}{AE} = -\frac{qz_1^2}{2AE} + \frac{qlz_1}{AE}$$

Новое граничное условие

$$w_B = w^* = w_1(z_1 = l) = -\frac{ql^2}{2AE} + \frac{ql^2}{AE} = \frac{ql^2}{2AE}, \quad \text{где}$$

w^* – ордината, соответствующая вершине параболы

$$w_2 = w_B + \int\limits_{z_2} \frac{\sigma_2 dz_2}{E} = \frac{ql^2}{2AE} + \int\limits_{z_2} \frac{(qz_2 + ql)dz_2}{2AE} =$$

$$= \frac{ql^2}{2AE} + \frac{qz_2^2}{4AE} + \frac{qlz_2}{2AE}$$

$$w_C = w_2(z_2 = l) = \frac{ql^2}{2AE} + \frac{ql^2}{4AE} + \frac{ql^2}{2AE} = \frac{5ql^2}{4AE}$$

Рис. 3

Далее на Рис. 3 написано «известное граничное условие». А граничные условия разве бывают неизвестными? И, наконец, «новое граничное условие»! Во-первых, что значит «новое»? А есть «старые»? Или «новое» – в смысле «только что найденное»? Но тогда это не граничные условия – они известны изначально из постановки задачи.

Во-вторых, граничное (оно же краевое) условие потому так и называется, что известно на границе (краю) расчетной схемы. Сечение В (вот и буква пригодилась! правда, не автору), для которого это «условие» записано, находится явно не на краю. Кстати, в математике и динамике используется понятие «начального условия», которое устанавливается либо для начального (нулевого) значения координаты, либо для начального момента отсчета времени. То есть здесь слова «граница» или «край» понимаются уже не в буквальном, а в переносном смысле.

В-третьих, величина w^* является никаким не граничным условием, а константой интегрирования C в формуле (1). И непонятно, при чем здесь вершина параболы. Если бы в сечении В нормальная сила не обратилась в нуль (что есть всего лишь частный случай), то вершина параболы могла бы находиться как в пределах участка (при отрицательной силе), так и за ними (при положительной). Экстремальное (максимум или минимум) значение осевого перемещения как для участка, так и для конструкции в целом, вообще ни о чем существенном не говорит. Здесь лучше использовать термин, например, «значение в конце участка».

Наконец, на последнем рисунке используются слово «излом». Подобные точки называются точками <u>перегиба</u> («такая точка, что кривая в некоторой окрестности этой точки лежит по разные стороны от касательной в точке») [5]. Термин «излом» в дифференциальном исчислении в частности и в математике в целом не встречается. Забавно, что гораздо позже, в Задаче №1 Семинара №7, терминология используется правильная, а в Задаче №1 Семинара №8 опять возникает «излом»…

Теперь – задача Семинара №3 (Рис. 4). Последний пункт списка «Дано:» выглядит так: $\delta = \alpha\Delta t°l$. Величина δ есть зазор, указанный на рисунке. Но ведь величины α и l тоже уже заданы (третий и первый пункты списка соответственно), зачем же задавать их повторно? Впрочем, некоторые другие величины, такие как A, E, l тоже задаются дважды – на рисунке и в тексте.

Далее, если величина δ дана, а определить следует $\Delta t°$, то почему бы не сделать так:

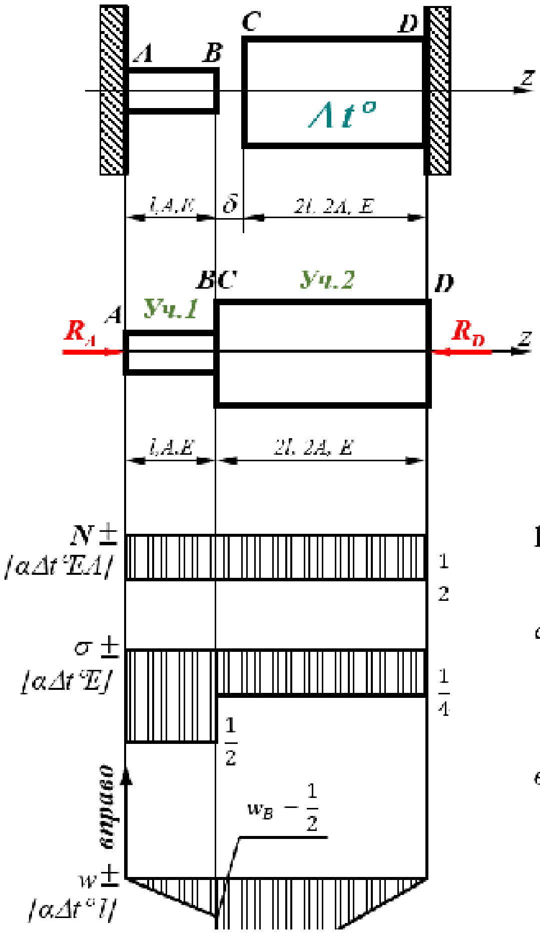
$$\Delta t° = \frac{\delta}{\alpha \cdot l} \tag{2}$$

Все, задача решена. Или нет? Или $[\Delta t°]$ и $\Delta t°$ из формулы (2) – разные переменные? Тогда как они соотносятся? А если получится, что $[\Delta t°] < \Delta t°$, о чем это будет говорить?

Видимо, следовало вообще не упоминать ни о какой δ (равно как о переменных A, E, l) в списке «Дано:». Иными словами: если заданы величины α и l, то <u>вообще любой размер</u> можно представить в виде $\alpha\Delta t°l$, где $\Delta t°$ – некая разность температур.

СЕМИНАР №3

Задача №1



Дано: *l; A; α; E; $\sigma_т$; $n_т$; $\delta=\alpha\Delta t^\circ l$*

Требуется:

1) *раскрыть статическую неопределимость системы;*
2) *построить эпюры N, σ, w.*
3) *определить из расчета на прочность допускаемую температуру нагрева [Δt°].*

Решение:

По условию задачи после нагрева зазор перекрывается, и ***два стержня*** начинают работать как единое целое. Таким образом, теперь у нас ***один стержень***.

1. Раскрываем *статическую неопределимасть системы*. Для этого

а) записываем *уравнение равновесия*

$$\sum F_z = 0 \qquad R_A - R_D = 0$$

$$\Rightarrow R_A = R_D$$

в) записываем *уравнение совместности деформаций* $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta$, где

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}\ ; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot 2l}{E \cdot 2A} + \alpha\Delta t^\circ \cdot 2l$$

Рис. 4

Что означает значок градуса в обозначении $\Delta t°$? То, что в качестве размерности используется именно градус? По какой шкале – Цельсия, Фаренгейта, Реомюра? А если измерять температуру по шкале Кельвина, как принято, например, в криогенной технике или астрономии, суть задачи изменится? А обозначение?

Переходим к разделу «Требуется:». Пункт 1 – «раскрыть статическую неопределимость системы». А как быть, если ее нет, то есть задача является статически определимой? Да, в этом случае пункт 3 теряет смысл, но эпюры *N*, σ, *w* построить все равно можно. Пункт 1 следует удалить, потому что он только запутывает читателя.

Если задача ставится не в общем виде, а с числовыми исходными данными, то факт перекрытия зазора можно (и нужно!) проверить. Если зазор не перекрывается, задача остается статически определимой. В данной задаче проверку провести нельзя, поэтому факт (не)перекрытия зазора надо постулировать в постановке задачи, иначе она вообще не поддается решению. На фоне этих фактических несуразиц орфографическая ошибка в слове «неопределимость» (п. 1) выглядит сущим пустяком…

После подпункта а) пункта 1 решения идет сразу подпункт в). Возможно, в пропущенном подпункте б) говорилось как раз про перекрытие зазора. Но буква «б», к сожалению, отсутствует.

Подпункт в) посвящен «уравнению совместности деформаций», в которое… никаких деформаций не входит. Поэтому следует говорить об «уравнении совместности перемещений».

В первой формуле пункта 3 записано условие прочности, при этом используется знак нестрогого неравенства – все правильно. Но уже во второй формуле знак неравенства почему-то заменяется на знак равенства. Надо было либо сразу писать равенство, рассчитывая на здравый смысл читателя, либо, напротив, сохранять знак неравенства вплоть до окончательной формулы, которая имела бы вид

$$[\Delta t] \le \frac{2 \cdot \sigma_T}{\alpha \cdot E \cdot n_T}$$

Наконец, в формуле проектировочного расчета на прочность напряжение записано по модулю, хотя в общем случае, если материал по-разному работает на растяжение и сжатие, такая запись ошибочна.

Еще одна задача продолжает тему «Колонны с зазором» (Рис. 5). В постановке задачи все почти верно (хотя вновь повторно заданы не только *A*, *E*, *l*, но и *F*). Здесь формула зависимости величины зазора от исходных данных выглядит не только уместной, но и необходимой, потому что в правую ее часть входят только известные величины и нет никаких неопределенных $\Delta t°$. Ошибки идут дальше. В п. 2 постановки задачи используются индексы «тр» и «ст», и читатель сам должен догадываться, что «тр» – сокращение от слова «трубка» (хотя данная деталь может называться как угодно: оболочка, втулка, кожух, обечайка, цилиндр, корпус, обшивка… продолжить самостоятельно). В качестве примера того, как следует описывать подобные задачи, можно привести Рис. 6 – там никаких вопросов и неоднозначностей по постановке задачи не возникает.

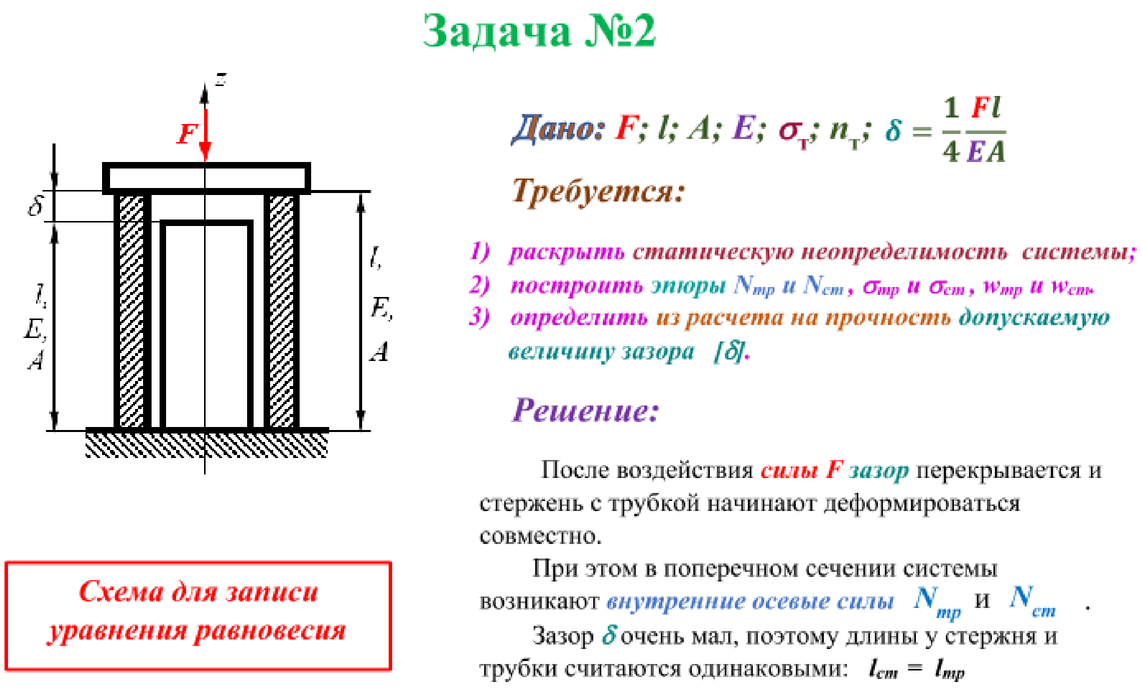
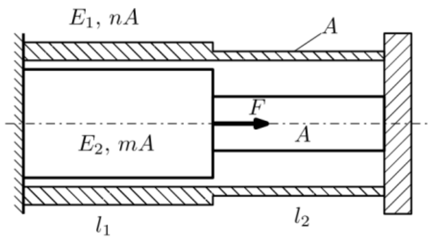


Рис. 5



Трубка и стержень одним торцом заделаны, а с другого скреплены абсолютно жёсткой плитой. Материал трубки — сталь, материал стержня — алюминий. Для заданной конструкции:

1. Определить коэффициент запаса;
2. Построить эпюры N, σ, w для трубки и стержня.

Рис. 6

Рассмотрим пункт «Решение:». Фраза «После воздействия силы *F* зазор перекрывается…» голословно констатирует факт, который подлежит обязательному доказательству. Перемещение плиты равно $\Delta = \dfrac{F \cdot l}{E \cdot A} > \dfrac{1}{4}\dfrac{F \cdot l}{E \cdot A}$, то есть зазор действительно перекрывается. Как уже отмечалось, даже в противном случае задача остается корректной, и даже расчет на прочность может быть выполнен, пусть и в общем виде.

Фраза «При этом в поперечном сечении системы возникают внутренние осевые силы $N_{тр}$ и $N_{ст}$» содержит сразу две ошибки. Во-первых, термин «внутренняя осевая сила» уже давно считается устаревшим, сейчас принято использовать термин «нормальная сила» [6]. Во-вторых, нормальная сила $N_{тр}$ начинает действовать не «при этом», то есть при перекрытии зазора, а при приложении внешней силы, безотносительно к тому, перекрывается зазор или нет. Если же под «этим» понимается как раз действие внешней силы, то тогда равна нулю сила $N_{ст}$.

Следующая фраза «Зазор δ очень мал» вообще абсурдна, потому что по сравнению, например, с размером атома зазор δ весьма велик. Следовало добавить хотя бы «…мал сравнительно с длиной *l*», или, еще лучше, «В рамках принципа начальных размеров длины у стержня…».

Далее следуют верные, хотя и несколько косноязычные, рассуждения о присвоении знаков нормальным силам, после чего в рамке, как высшая мудрость, приводится вот что (Рис. 7). Хочется спросить: а данная задача (равно как и все предыдущие) относится разве не к «стержневым системам»? А к каким тогда?

Это правило распространяется и на стержневые системы.

Рис. 7

Видимо, имелось в виду, что формулы для напряжения и удлинения при растяжении-сжатии справедливы не только для стержней, но и вообще любых тел. Но, во-первых, это верно с довольно большой погрешностью, во-вторых, в курсе сопротивления материалов расчетные схемы, отличные от стержня (пластины и оболочки), изучаются только во втором семестре, а в-третьих, вышеупомянутый принцип начальных размеров неприменим к телам общего вида (или к т. н. массивным телам, изучаемым в курсе теории упругости).

Задача №4 (Рис. 9) того же Семинара №3 посвящена уже ферменным конструкциям. В п. 1 списка «Требуется:» подробно разъясняется, что значит раскрытие статической неопределимости. Но ведь статически неопределимые задачи рассматривались и ранее, почему тогда не давались подобные комментарии? Или данная задача от них чем-то принципиально отличается? Чем же? А в статически определимых конструкциях разве не нужно находить силы по участкам?

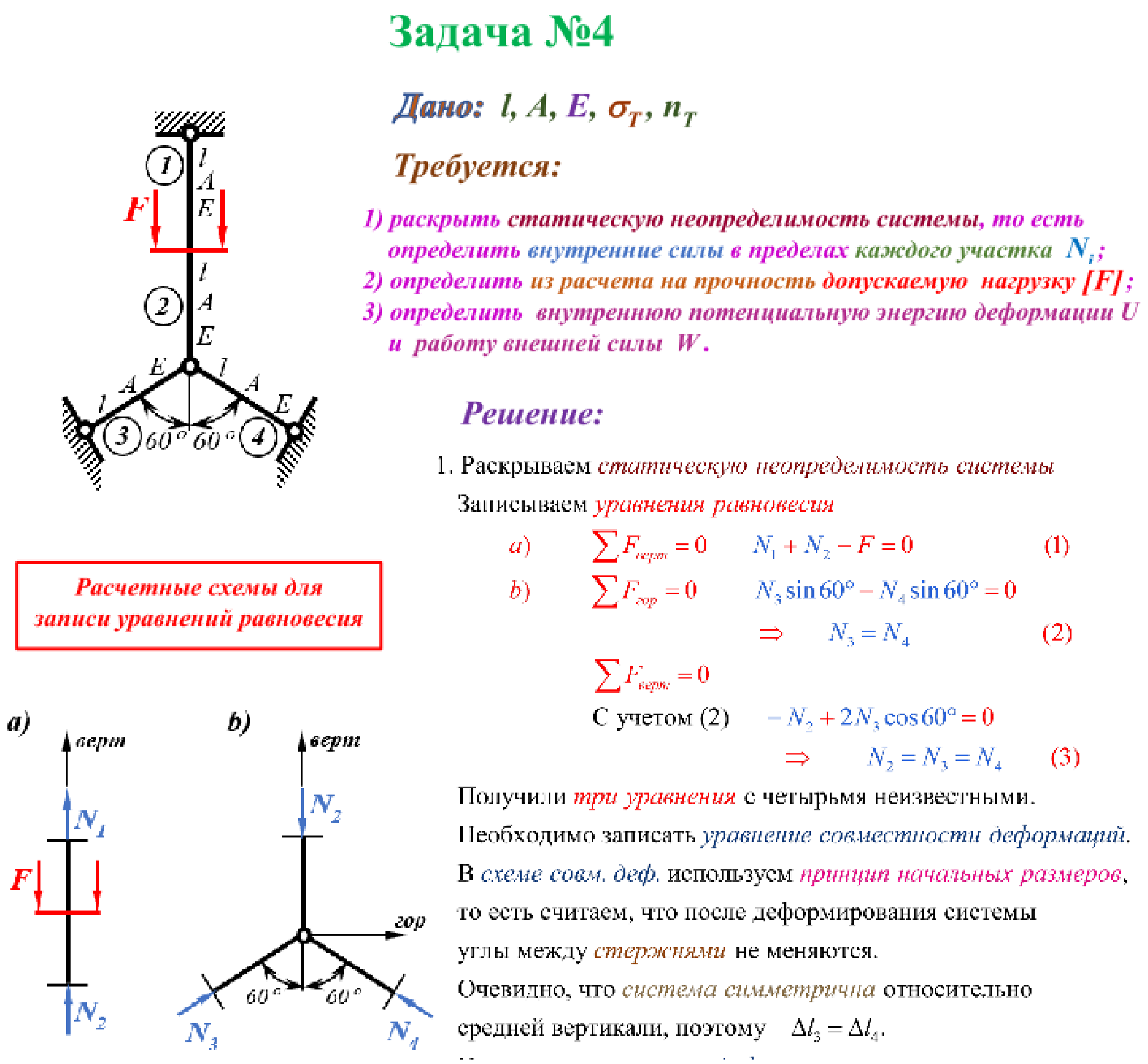


Рис. 8

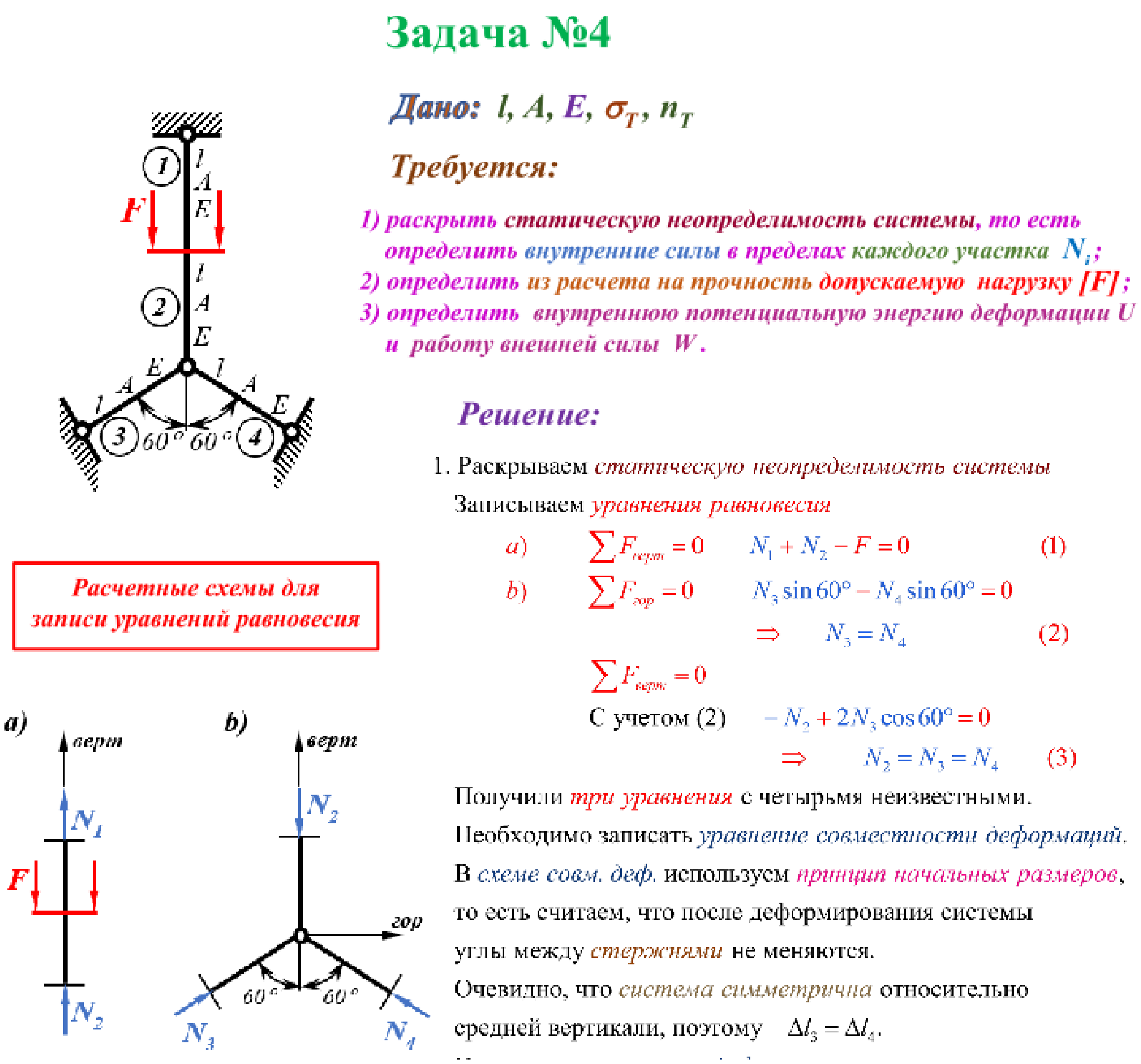


Рис. 9

Напротив, вновь, как и ранее, никаких рассуждений о том, является ли конструкция статически неопределимой, и если да, то сколько раз, мы не видим. Следует подсчитать число неизвестных, число уравнений, потом найти их разность и только после этого делать вывод о факте и степени статической неопределимости.

Последняя фраза на Рис. 9 гласит: «Очевидно, что система симметрична…». Но если это очевидно, то зачем было вводить силу N_4, которая в силу симметрии равна силе N_3? Тогда удалось бы сократить число неизвестных с четырех до трех, число уравнений – с трех до двух, и сэкономить место, уменьшив оба рисунка вдвое по горизонтали.

Кстати, автор на всякий случай напоминает читателю (вдруг он забыл), что горизонталь – это направление «лево-право», а вертикаль – «верх-низ». Между тем никто не отменял прямоугольную декартову систему координат х-у.

Далее (Рис. 10) говорится, что «…на первой схеме показано, что второй участок работает на сжатие, а на второй схеме он удлиняется». Сказанное верно лишь частично. На второй схеме не показано, что удлиняется именно второй участок – показано, что узел переместился вниз, но такое может происходить и при удлинении, и при укорочении второго участка.

Еще в одной задаче следует обратить внимание на последнюю формулу на Рис. 11. Она, строго говоря, неверна. Удлинение – математическая величина, которая может быть как положительной (собственно удлинение), так и отрицательной (укорочение). По рисунку очевидно, что $\Delta l_1 < 0$; $\Delta l_2 < 0$; $\Delta l_3 > 0$, а приравнивать два числа с заведомо разными знаками лишено смысла. Правильная запись формулы выглядит так: $|\Delta l_1| = |\Delta l_2| = |\Delta l_3|$.

С учетом (2) $\quad -N_2 + 2N_3\cos 60^\circ = 0$

$$\Rightarrow \quad N_2 = N_3 = N_4 \qquad (3)$$

Получили *три уравнения* с четырьмя неизвестными.
Необходимо записать *уравнение совместности деформаций.*
В *схеме совм. деф.* используем *принцип начальных размеров*, то есть считаем, что после деформирования системы углы между *стержнями* не меняются.
Очевидно, что *система симметрична* относительно средней вертикали, поэтому $\Delta l_3 = \Delta l_4$.
Из *схемы совместного деформирования* следует

$$\Delta l_3 = (\Delta l_1 + \Delta l_2)\cos 60^\circ \ \Rightarrow \qquad 2\Delta l_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

Расшифруем *уравнение совместности*

$$2\frac{N_3 l}{EA} = \frac{N_1 l}{EA} - \frac{N_2 l}{EA}$$

В правой части уравнения у второго слагаемого стоит минус (-), потому что здесь противоречие: на *первой схеме* показано, что *второй участок* работает на *сжатие*, а на *второй схеме* он удлиняется.
Таким образом $\quad 2N_3 = N_1 - N_2$
С учетом (3) можем записать $\quad N_1 = 3N_2$, подставим это в (1) $\quad \rightarrow \quad N_2 = N_3 = N_4 = \dfrac{F}{4}$ (*сж*) $\quad \rightarrow \quad N_1 = \dfrac{3}{4}F$ (*раст*)

2. *Из расчета на прочность* определяем *допускаемую нагрузку* $[F]$

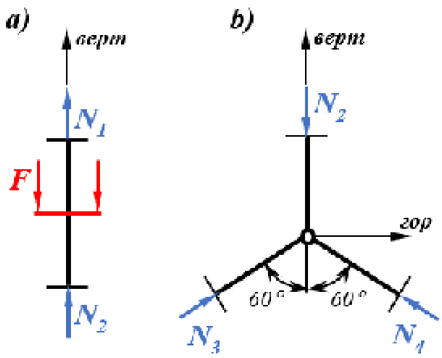


Схема совместного деформирования

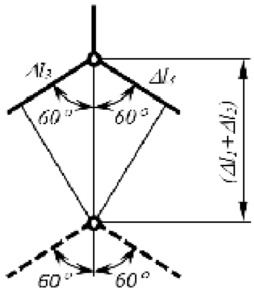


Рис. 10

Задача №5

Дано: ***F, l, E, σ_T, n_T***

Требуется:

1) раскрыть статическую неопределимость системы, то есть определить внутренние силы в стержнях N_i ;
2) определить из расчета на прочность допускаемую площадь поперечного сечения стержня $[A]$.

Решение:

1. Раскрываем *статическую неопределимость системы*

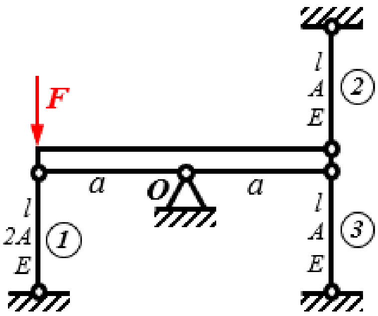
Записываем *уравнение равновесия*

$$\sum M_o = 0 \qquad Fa - N_1 a - N_2 a - N_3 a = 0$$

$$F - N_1 - N_2 - N_3 = 0$$

Получили *одно уравнение* с тремя неизвестными.
Система *два раза статически неопределима.*
Необходимо записать *два уравнения совместности деформаций*

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$$



Расчетная схема для записи уравнения равновесия

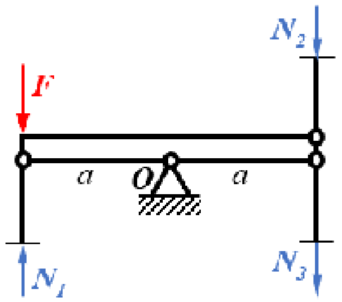


Рис. 11

В другой задаче можно найти следующий фрагмент (Рис. 12). Если показать его любому человеку, сведущему в математике и незнакомому с механикой, и спросить, что записано в числителях обеих формул, он, скорее всего, скажет: «Вариация функционала *E*». Дело в том, что буквы *d*, δ, Δ и ∂ в математике являются в определенном смысле «зарезервированными», обозначая бесконечно малую величину, приращение, дифференциал, вариацию и т. п. Поэтому их стараются не использовать для обозначения скаляров, векторов и функций, а если и используют, то в ряду сомножителей ставят в конце. То есть первую формулу из показанных на Рис. 12 лучше записывать так: $\sigma_1 = \dfrac{E\delta}{3l}$ или хотя бы так: $\sigma_1 = \dfrac{\delta \cdot E}{3l}$.

Нормальные напряжения, возникающие в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{\delta E}{3l} \qquad \sigma_2 = \frac{\delta E}{6l}$$

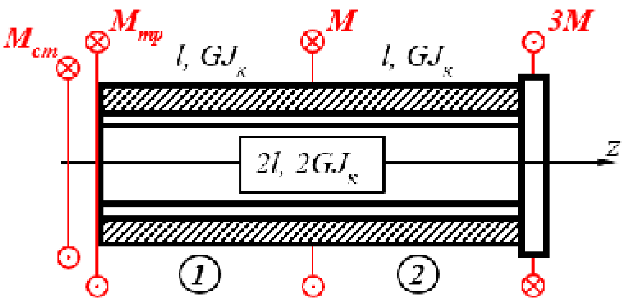
Рис. 12

Переходим к теме «Кручение». В одной из задач (Семинар №6, Задача №2) можно увидеть такую запись (Рис. 13). В левой части уравнения – угол закручивания, то есть безразмерная величина. В правой – безразмерный коэффициент, умноженный на координату, имеющей размерность м (или мм).

$$\varphi_1 = \varphi_A + \int_{z_1} \frac{M_{к1} dz_1}{GJ_{к1}} = \frac{184 \cdot 10^3 z_1}{8 \cdot 10^4 \cdot 15708} = 1{,}45 \cdot 10^{-4} z_1$$

Рис. 13

В следующей задаче (Рис. 14) нужно обратить внимание на последние формулы. Если со второй все более или менее ясно (читатель обязан помнить, что «ст» – это стержень, а «тр» – трубка! А если он пропустил тему «Растяжение-сжатие», начав сразу с кручения?), то предыдущая нуждается в пояснении, что речь идет об угле закручивания торцевого (самого правого) сечения, а не какого-то иного.



Решение:

1. Раскрываем *статическую неопределимость* системы.

Для этого записываем

а) уравнение равновесия

$$\sum M_z = 0 \quad -M_{ст} - M_{тр} - M + 3M = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_{ст} + M_{тр} = 2M$$

b) уравнение совместности деформаций: $\quad \Delta\varphi_{ст} = \Delta\varphi_{тр} \qquad \Delta\varphi_{ст} = \Delta\varphi_{тр1} + \Delta\varphi_{тр2}$

Рис. 14

Кстати, а почему перед буквой φ, которая действительно традиционно используется для обозначения угла поворота сечения, стоит буква Δ, которую обычно трактуют как «изменение» или «приращение»? Получается, что угол был одним, а стал другим, то есть получил приращение? Ну, вообще-то, так и есть – все углы были нулевыми до нагружения, а в его результате приобрели в общем случае ненулевые значения. Но ведь тогда приращение угла равно самому углу и, избавившись от буквы Δ, мы не поменяем ничего с точки зрения математики, зато резко проясним физический смысл. Почему тогда в задачах растяжения-сжатия осевое перемещение записывалось как *w*, а не Δ*w*? Запись Δφ оправдана, если, допустим, мы знаем угол в конце (*i* - 1)-го участка вала и ищем угол в конце *i*-го. Тогда

$$\Delta\varphi_i = \frac{M_{zi} l_i}{GI_K}; \qquad \varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i \tag{3}$$

(при условии постоянства крутящего момента и жесткости).

Но в данном случае, очевидно, Δφ имеет смысл не приращения угла, а просто угла, что вводит читателя в заблуждение. Между прочим, на Рис. 13 ни на какое приращение не указывается, хотя интеграл имеет смысл как раз Δφ (ср. с формулой (3)). В чем же различие этих двух задач?

В конце задачи такая непоследовательность приводит уже к потенциальной ошибке (Рис. 15). На эпюрах угол обозначен как положено – через φ, а в формулах – через Δφ. Это одна и та же величина? Если нет, то почему они равны, а если да, то почему по-разному обозначены?

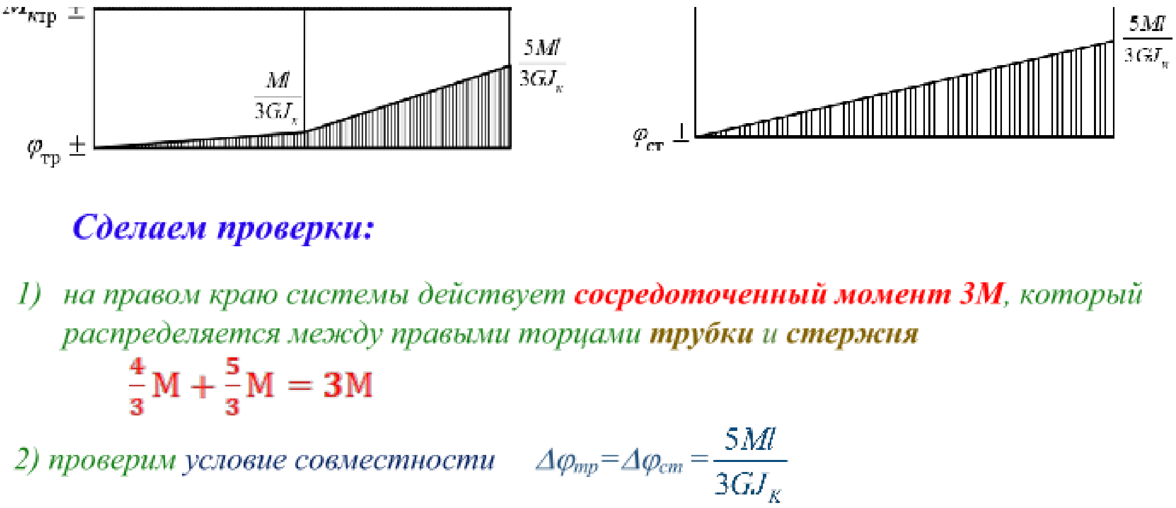


Рис. 15

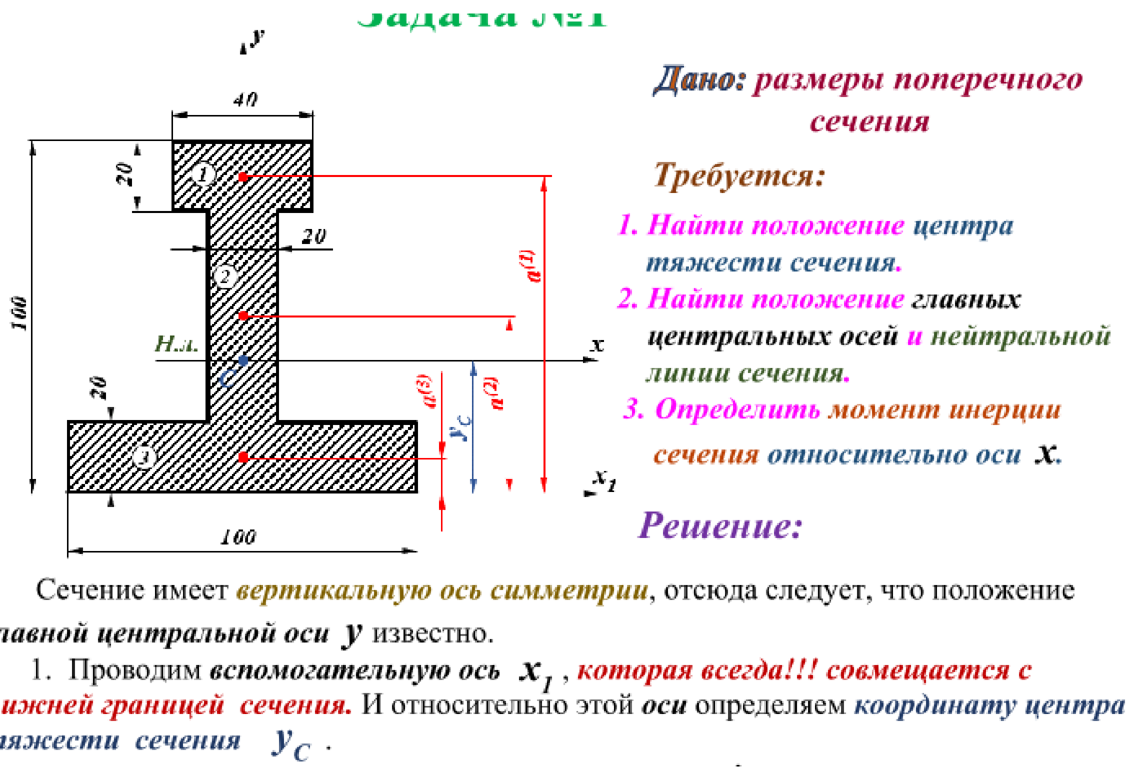


Рис. 16

Семинар №9 посвящен геометрическим характеристикам плоских фигур (Рис. 16). Предлагается далеко не самая удобная методика вычисления момента инерции, а именно: после определения центра тяжести каждого из прямоугольников, составляющих фигуру, подсчитывается его центральный момент и производится перенос оси к центральной оси всей фигуры.

Более простой путь заключается в предварительном определении момента инерции фигуры относительно некоторой оси, выбираемой из соображений удобства, а затем момент инерции переносится к центральной оси фигуры. Преимущества данного пути заключаются в двух обстоятельствах. Во-первых, для фигуры, разбиваемой на три прямоугольника (как та, что на Рис. 16), получается пять слагаемых, а не шесть, как в показанном решении. И вообще, для фигуры из n прямоугольников получаем $(n + 2)$ слагаемых вместо $2 \cdot n$, как предлагается.

Во-вторых, расстояния между осями получаются более «простыми», то есть удобными для расчета. Например, для данной фигуры рекомендуется выбирать начальную («вспомогательную») ось на 20 мм выше нижней границы. Тогда ординаты центров тяжести трех прямоугольников будут равны соответственно 40, 30 и

10 мм, а не 52, 12 и 28 мм, как в решении. Если еще сделать замену, скажем, a = 10 мм, то по простой методике момент инерции в долях a^4 можно подсчитать просто в уме.

На Рис. 16 предлагается, точнее, жестко требуется (с тремя восклицательными знаками!) совмещать вспомогательную ось с нижней границей. Требование выглядит, мягко говоря, странным. А если перевернуть фигуру вверх ногами, то положение оси изменится? Чем вообще низ лучше верха?

Более того, рекомендуется как раз избегать верхней и нижней границ фигуры. Дело в том, что обычно центр тяжести располагается ближе к ее геометрическому центру, лежащему на полпути между верхней и нижней границами, чем к любой из них. Например, для данной фигуры расстояния от центра тяжести до границ равны 38 мм и 62 мм, а до геометрического центра – всего 12 мм. То есть, выбрав начальную ось на 20 мм (оптимально) или на 80 мм (чуть хуже) выше той самой пламенно рекомендуемой нижней границы, мы существенно упростим расчеты.

Напоследок заметим, что момент инерции подсчитан как $4.2 \cdot 10^6$ мм^4, а правильный ответ $4.357(3) \cdot 10^6$ мм^4, то есть погрешность составляет 3.6%. Многовато для простой задачи…

Далее в Задаче №5 того же Семинара №9 встречаем еще одно грубейшее нарушение правила размерностей – Рис. 17. По формуле выходит, что единица измерения напряжения – $\frac{1}{\text{мм}^3}$. Впрочем, нет, из другой задачи следует, что размерность напряжения – $\frac{\text{Н}}{\text{мм}}$ (Рис. 18)…

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_{x\max}|}{W_x} = \frac{ql^2}{0{,}21d^3} = \frac{25 \cdot 100^2}{0{,}21d^3} = 1190476{,}2\frac{1}{d^3}$$

Рис. 17

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_{x\max}|}{W_x} = \frac{9 \cdot ql^2}{8 \cdot W_x} = \frac{9 \cdot q \cdot 1000^2}{8 \cdot 9{,}84 \cdot 10^4} = 11{,}4q$$

Рис. 18

Вообще привычка подставлять исходные данные в процессе расчета не просто считается дурным тоном, но и чревата ошибками за счет многочисленных округлений и, как следствие, потери точности. Более того, получение окончательной общей формулы позволяет проводить, например, проверку по предельному переходу, что особенно удобно для сложных задач. Получать промежуточные результаты приходится, если значение вычисляемой переменной требуется для принятия решения о дальнейшем ходе расчетов, например, для выбора метода или алгоритма. Во всех остальных случаях необходимо подставлять исходные данные все сразу и в одну-единственную формулу.

В Семинаре №13 рассматривается изгиб, в частности, расчет на жесткость методом Верещагина. Предлагается крайне трудоемкий и изощренный прием разбиения эпюр, поиска центров тяжести и ординат каждого элемента в отдельности, что приводит к громоздким и чреватым ошибками расчетам.

Рассмотрим Задачу №3 (Рис. 19). На единичной эпюре видны четыре промежуточных ординаты под центрами тяжести частей эпюры M_x, и еще одна – на ней самой. Автор называет такой прием «расслоением эпюры». Поиск этих пяти ординат опущен, но, если его привести, объем расчетов увеличится чуть ли не вдвое.

Покажем, что для расчета на жесткость есть гораздо более удобные приемы. Например, по методу Симпсона находим:

$$EI_x v_K = \frac{l}{6}\left(4 \cdot \frac{3}{8}ql^2\frac{1}{2}l + ql^2 \cdot l\right) + \frac{l}{6}\left(-\frac{1}{2}ql^2 \cdot l + 2 \cdot ql^2 \cdot l\right) = \frac{ql^4}{6}\left(\frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{13}{24}ql^4$$

Здесь потребовалось искать всего одну промежуточную ординату $\frac{3}{8}ql^2$ в середине первого участка.

Расчет методом Мюллера-Бреслау дает:

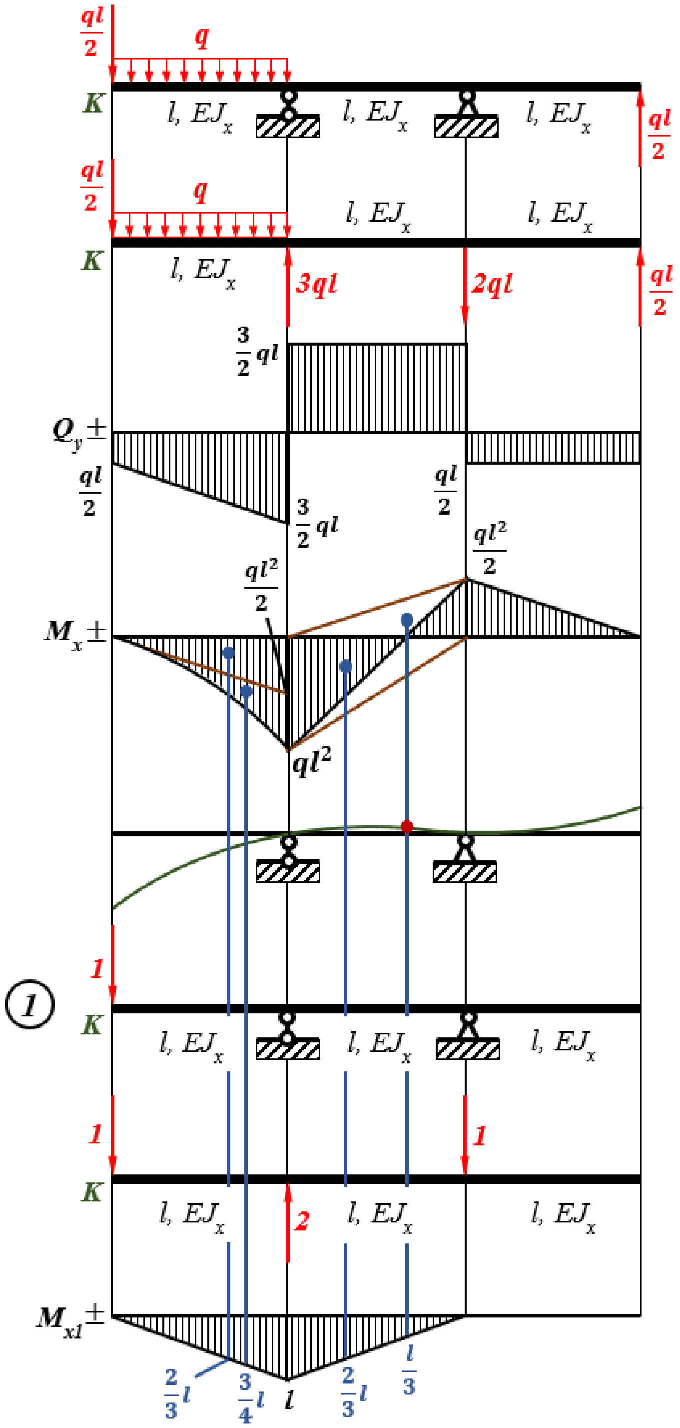
$$EI_x v_K = \frac{1}{2} \cdot l \cdot ql^2 \cdot \frac{2}{3}l - \frac{1}{12}ql^3\frac{1}{2}l + \frac{l}{6} \cdot l\left(2 \cdot ql^2 - \frac{ql^2}{2}\right) = ql^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{24}ql^4,$$

при этом вообще ни одной промежуточной ординаты не понадобилось.

Другой пример – уже из темы «Плоские рамы» (Рис. 20). Вычисляются три промежуточных ординаты. Расчет на жесткость по Мюллеру-Бреслау вновь не требует каких-либо вспомогательных выкладок:

$$EI_x\theta_A = \frac{l}{6}\left[ql^2\left(2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{ql^2}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right)\right] - \frac{1}{12}ql^3 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)l - \frac{1}{2}\frac{ql^2}{2}l\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12}ql^3 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= ql^4\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{48}\right) = ql^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{12} - \frac{1}{48}\right) = \frac{1}{12}ql^4$$



Дано: q, l, EJ_x

Требуется:

1) построить эпюры Q_y и M_x;
2) показать упругую ось балки;
3) определить прогиб балки в сечении К

Решение:

Определяем *прогиб* ***балки*** *в сечении К* :

$$v_K = \frac{1}{EJ_x} \times M_x \times M_{x1} =$$

$$= \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}l + \frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{4}l + \frac{1}{2}\cdot ql^2\cdot l\cdot\frac{2}{3}l - \frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{l}{3}\right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EJ_x}\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EJ_x}\left[\frac{4}{24}+\frac{3}{24}+\frac{8}{24}-\frac{2}{24}\right]$$

$$v_K = \frac{13ql^4}{24EJ_x}$$

Рис. 19

Задача №4 предваряется подробным описанием того, как рассматривать рамы с врезанным шарниром, хотя никаких принципиальных отличий от расчета балок с врезанным шарниром в таком расчете нет. Зачем-то дается рекомендация рассекать раму по врезанному шарниру и находить в нем сразу две силы. Отдельно оговариваются действия в случае, если к шарниру приложена внешняя сила.

Нам представляется, что рассекать раму по шарниру и искать в нем силы – последнее, что стоит делать в таких задачах. Далее, приложение силы именно к врезанному шарниру лишь упрощает решение, поскольку такая сила не входит в уравнения моментов.

В качестве примера рассматривается очень простая рама (Рис. 21), построение эпюры моментов в которой требует ни много ни мало как построение эпюры поперечной силы! Можно показать, что решение такой задачи выполняется в уме без применения метода сечений.

Прежде всего, составим уравнение моментов справа от врезанного шарнира относительно него же. Вертикальная реакция в нижней правой точке, будучи умноженной на ненулевое плечо, будет единственным силовым фактором, входящим в левую часть уравнения, правая часть которого равна нулю. То есть вертикальная реакция нижнего правого шарнира также нулевая. Теперь, составляя сумму сил на вертикаль, находим реакцию левого верхнего шарнира: она направлена вверх и равна $2ql$. Составляем сумму моментов относительно врезанного шарнира сверху от него. Плечи распределенной нагрузки равны, а следовательно, их суммарный момент равен нулю. Кроме того, равны и плечи вертикальной реакции слева и горизонтальной – справа, значит, равны и сами силы. И, наконец, из суммы на горизонталь находим реакцию правого нижнего шарнира – те же $2ql$ вправо. Построение эпюр для трех независимых консолей выполняется очевидным образом.

Так, в уме, без метода сечений и вообще каких-либо рисунков и формул задача решена за считанные секунды.

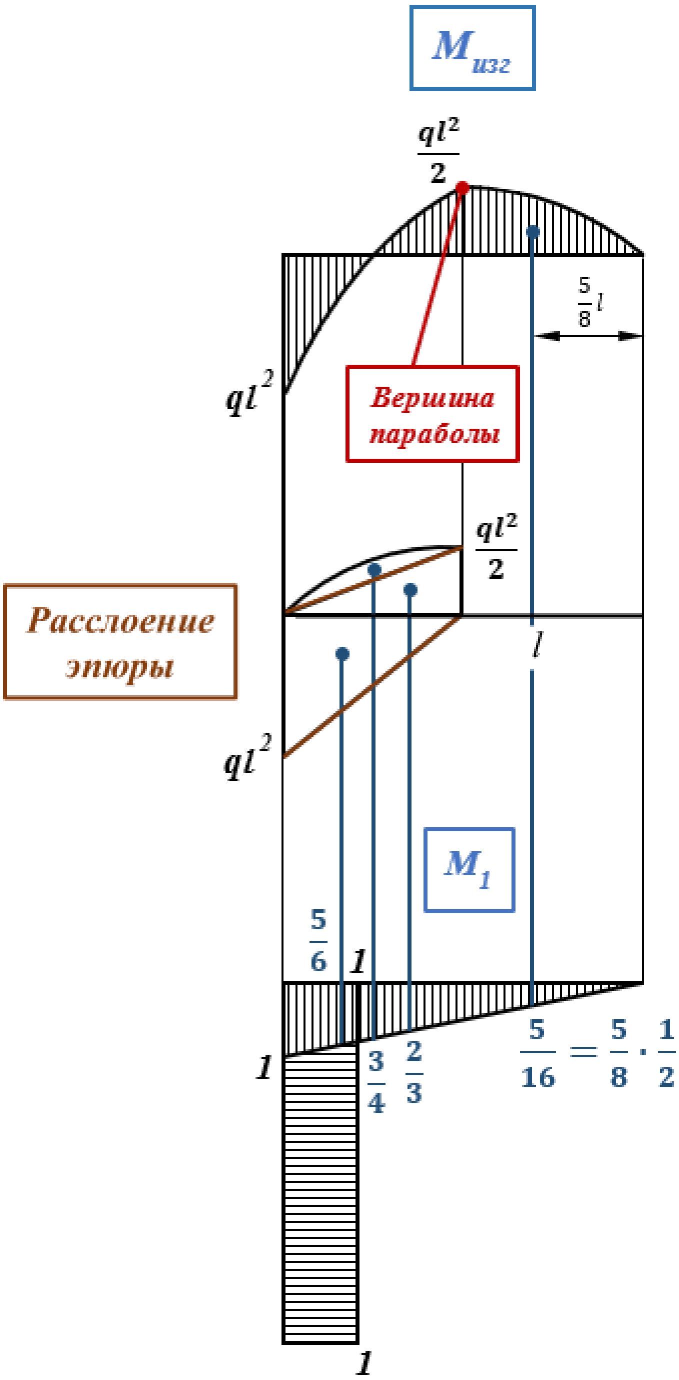


Рис. 20

Переходим к материалам, традиционно рассматриваемым во втором семестре.

Первая же задача первого же семинара (Рис. 22) начинается с записи $n = 1$. Откуда это следует, что такое n и почему она равна единице, поясняется существенно ниже (в п. 1 «Решения»), и тогда первая запись становится попросту лишней. Более того, в формуле присутствуют числа 4 и 3, и следовало бы пояснить, хотя бы один раз в первой задаче, откуда эти числа (количества внешних связей и уравнений равновесия, соответственно) берутся.

Далее (Рис. 23) вводится термин «коэффициент влияния». Такое понятие в строительной механике действительно используется [7], но имеет совершенно другие значения («коэффициент влияния формы сечения», «коэффициент влияния поперечных сил» и др.), к методу сил отношения не имеющие. Величины δ_{1F} и δ_{11} следует называть перемещениями или смещениями [6], или, точнее говоря, обобщенными перемещениями, или податливостями, или, наконец, компонентами матрицы податливостей. В сопротивлении материалов термин «коэффициент влияния» почти не используется.

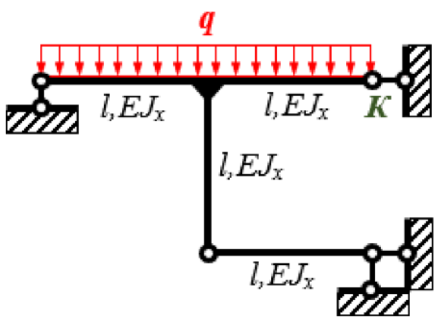
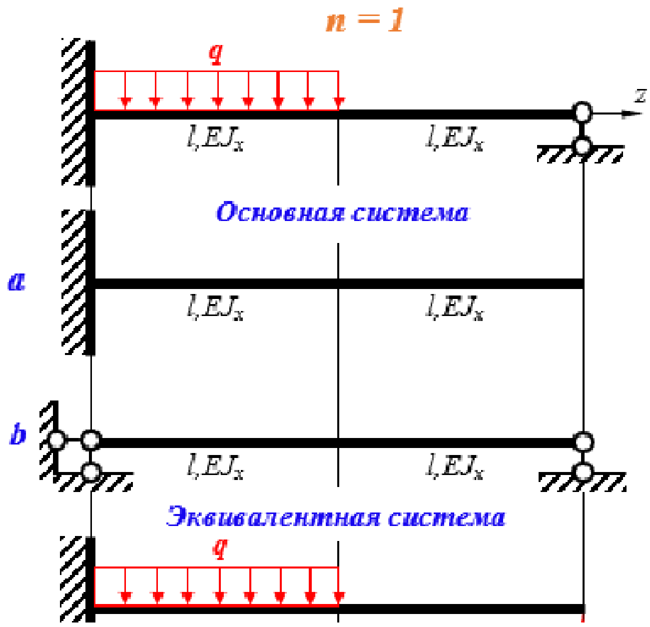


Рис. 21

Здесь нужно подчеркнуть, что речь идет о русскоязычных терминах, поскольку в английском языке подобные величины действительно именуются коэффициентами влияния (influence coefficient) [8]. Разница состоит в том, что коэффициентами влияния называются перемещения под действием единичных силовых факторов, то есть перемещение δ_{1F} даже на английском языке коэффициентом влияния не зовется.

Впрочем, удалось найти всего один русскоязычный источник [9], использующий ту же терминологию, но, опять же, только в отношении единичных перемещений.



***Дано:* q, l, EJ_x**

Требуется:

1. ***Раскрыть статическую неопределимость балки методом сил.***
2. ***Построить эпюры Q_y, M_x.***
3. ***Сделать проверку.***

Решение:

1. Определяем ***степень статической неопределимости***

$$n = 4 - 3 = 1$$

Рис. 22

В Задаче №2 выполняется расчет на прочность (Рис. 24). Прежде всего, в формуле проектировочного расчета на прочность стоит знак строгого неравенства, что не совсем верно: неравенство должно быть нестрогим. Величина [σ] потому и называется допускаемым (или, в некоторых разделах механики, безопасным) напряжением, что ее достижение в опасной точке допустимо, то есть приемлемо, и является безопасным для конструкции. Но далее знак строгого неравенства чудесным образом превращается в знак равенства, что вообще не соответствует логике. Аналогичная оплошность была допущена в Задаче №3 Семинара №1 при расчете колонны с зазором, но там хотя бы в равенство превратилось нестрогое неравенство, что еще можно было как-то объяснить.

5. Определяем ***коэффициенты влияния*** по ***правилу Верещагина***:

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EJ_x}\left[-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\right)\cdot\left(\frac{7}{4}l\right)\right] = -\frac{7ql^4}{24EJ_x}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2l\right)\cdot\left(\frac{4}{3}l\right)\right] = \frac{8l^3}{3EJ_x}$$

Рис. 23

9. ***Расчет на прочность.***

Условие прочности $|\sigma_{max}| < [\sigma]$.

Максимальное напряжение $$|\sigma_{max}| = \frac{|M_{x\,max}|}{W_x}.$$

В нашем случае $|M_{x\ max}| = ql^2$, $$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}a^3 \Rightarrow |\sigma_{max}| = \frac{3ql^2}{2a^3} \Rightarrow$$

$$[\sigma] = \frac{3}{2}\cdot\frac{[q]l^2}{a^3} \Rightarrow [q] = \frac{2[\sigma]a^3}{3l^2}$$

Рис. 24

Переходим к Задаче №3. Сопровождающий ее текст (Рис. 25) богат на ошибки самого разного свойства. Во-первых, с точки зрения грамматики надо писать либо «Это значит, что направления…», либо «Значит, направления…».

Во-вторых, существительное в единственном числе «направление» никак не соответствует краткому прилагательному во множественном числе «кососимметричны». В-третьих, слово «напротив» всегда выделяется запятыми: «Эпюра фактора Q_y, напротив, является симметричной». В-четвертых, вовсе не обязательно анализировать все факторы (в данном случае поперечную силу), чтобы сделать вывод о косой симметрии расчетной схемы. То есть рассуждения о силе вообще можно опустить без ущерба для смысла. В-пятых, поскольку впервые рассматривается симметричная задача, нелишним было бы хотя бы один раз уточнить, что речь идет именно об упругой симметрии.

В-шестых, выражение «все будет то же самое с учетом косой симметрии» не только очень просторечно, если не вульгарно, но больше запутывает, чем проясняет. Лучше звучит, например: «можно рассматривать только левую половину балки, а на правой симметричные факторы будут кососимметричны соответствующим факторам левой половины».

Это ***кососимметричная система***. Значит, что направление ***опорных реакций*** и их величина ***кососимметричны*** относительно среднего сечения, а также ***кососимметрична эпюра M_x***. Отсюда следует, что в среднем сечении ***симметричный фактор $M_x = 0$. Эпюра фактора Q_y*** напротив является ***симметричной***. Значит, можно рассматривать только половину ***балки***, а для другой половины все будет то же самое с учетом ***косой симметрии***. Поэтому

Рис. 25

В дальнейшем разборе задачи читаем фразу (Рис. 26), которую следует признать глубоко ошибочной. Степень статической неопределимости конструкции является ее неотъемлемым, причем объективным, то есть не зависящим от желаний и действий расчетчика, свойством, поскольку определяется ее геометрией и наложенными на нее связями, но никак не методом решения. Путем использования свойств симметрии можно снизить порядок системы канонических уравнений метода сил, но при этом никак не повлиять на степень ее статической неопределимости. В [6] говорится так: «при расчете таких рам оказывается возможным упростить решение задачи и снизить число искомых силовых факторов». Обратим внимание: снижается число неизвестных, но никак не степень статической неопределимости! Также в [10] читаем: «используя симметрию … можно снизить порядок канонической системы уравнений».

Таким образом, ***степень статической неопределимости*** снижается на единицу ***$n = 1$***.

Рис. 26

В Семинаре №4 ставится, среди прочих, следующая задача (Рис. 27). Во-первых, описываемый силовой фактор принято называть просто «изгибающим моментом» [6]. Во-вторых, слово «внутренний» явно лишнее – построить эпюры внешних силовых факторов просто невозможно. В-третьих, момент (не обязательно изгибающий) уже давно принято обозначать буквой M с индексом оси, вокруг которой он действует, в данном случае M_x. Обозначение $M_{изг}$ некорректно хотя бы потому, что изгибающих моментов два, и в общем случае следует уточнять, о каком из них идет речь. Наконец, в-четвертых, индекс принято указывать шрифтом меньшего кегля, опущенным относительно текстовой строки.

2. ***Построить эпюру внутреннего изгибающего момента Мизг.***

Рис. 27

Чуть ли не во всех задачах изгиба автор строит эпюры поперечной силы. Известно [6], что в подавляющем большинстве задач строительной механики вообще, и во всех задачах курса сопротивления материалов в частности, влияние внутренних сил (любых) на прочность и жесткость конструкции существенно меньше влияния моментов (любых). Поэтому построение эпюр поперечных сил при изгибе является полезным лишь в отдельных, особо сложных, случаях, к которым все рассмотренные задачи не относятся, а в рамах подобные эпюры не рекомендуется строить вовсе.

В Задаче №2 рассматривается трижды статически неопределимая безопорная рама (Рис. 28) и предлагаются (или, как выражается автор, разрабатываются) три основные системы (ОС) (Рис. 29), две из которых («b» и «c») совершенно неприемлемы, потому что в них отброшены не три, а шесть внутренних связей. Как следствие, в ОС «c» верхняя, например, половина будет вращаться по часовой стрелке, будучи, таким образом, кинематически изменяемой.

Выбрав ОС с разрезом сверху по линии g-g, и рассматривая, например, единичное состояние, можно (хотя и не обязательно) сделать сечение снизу по той же линии и найти из уравнений равновесия внутренние силовые факторы (в данном случае, с учетом симметрии, только поперечную силу), а не прикладывать ее в нижнем сечении изначально.

Ниже, разбирая ОС «с», автор противоречит самому себе, делая один разрез слева по линии f-f (как и положено), а не два, как предлагалось на Рис. 29.

Что означает запись «EJ_x» на Рис. 28? Видимо, она должна иметь вид «EJ_x = const», потому что иначе она является просто лишней.

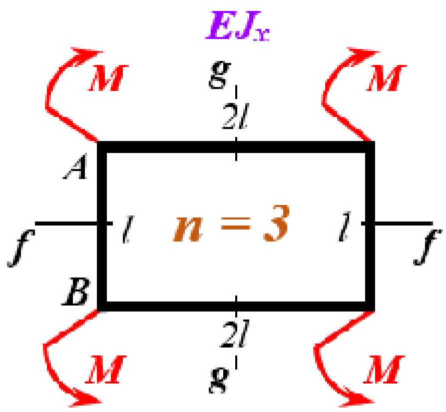


Рис. 28

Переходим к Семинару №6, посвященному (плоско)пространственным рамам, и сразу наталкиваемся на текст, изобилующий перлами – Рис. 30.

Во-первых, что такое осевой момент? Судя по всему, под этот термин подходят и изгибающий, и крутящий моменты. А какие еще бывают? Если никакие, то какой смысл несет слово «осевой»?

Во-вторых, идти от свободного края можно, если он есть, а откуда идти, если рама замкнутая? Фраза «вычисляем ординату как сумму моментов относительно этого сечения от всех силовых факторов, приложенных к раме от свободного края до рассматриваемого сечения» вновь больше затуманивает, чем проясняет. В-третьих, ординату чего? В-четвертых, сумму моментов каких? Если там действует изгибающий и крутящий моменты, их тоже надо суммировать? Вне зависимости от плоскостей, в которых они лежат? В-пятых, если попытаться перевести цитируемую фразу на русский язык, то, видимо, получится следующее: «Внутренний силовой фактор в сечении есть взятая с обратным знаком сумма внешних силовых факторов соответствующего типа, находящихся по одну сторону от сечения». Если перевод верен, то данное правило является общим для любых конструкций, а не только (плоско)пространственных рам.

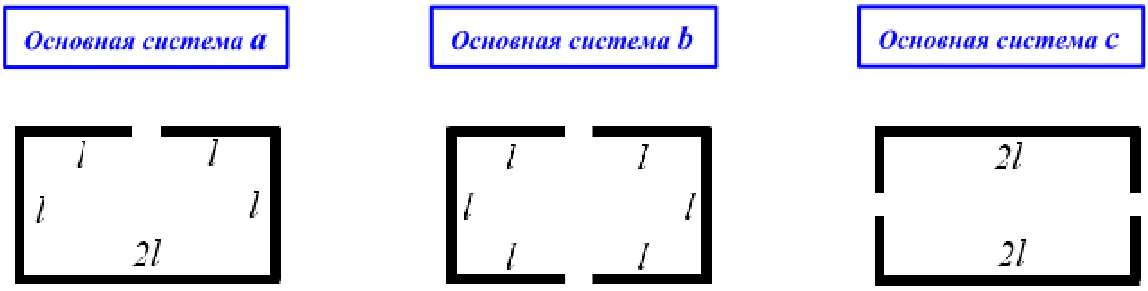


Рис. 29

Построение эпюр внутренних осевых моментов

Идем от свободного края, в каждом сечении вычисляем ординату как *сумму моментов* относительно этого сечения от всех *силовых факторов*, приложенных к ***раме*** от свободного края до рассматриваемого сечения. В углах выполняем ***три правила***:

1. «*С чем пришел, с тем ушел*». Это означает, сколько *моментов* было в конце *предыдущего участка* столько же должно быть в начале *следующего участка*. При этом ***изгиб*** может переходить в ***кручение***, а ***кручение*** в ***изгиб***. В последнем случае важно правильно определить, с какой стороны будут сжатые слои при ***изгибе***. Если *момент* работает в плоскости, в которой расположен следующий *стержень*, то *момент* переходит в *изгибающий*. Если плоскость *момента* перпендикулярна оси следующего *стержня*, то *момент* переходит в *крутящий*.
2. В начало *каждого участка* переносим *все предыдущие силы*.

Помнить: *момент* переходит в *постоянный момент*, а перенесенные *силы* могут его изменить.

3. Если в ***одном узле*** сходятся несколько *стержней*, то идем к этому ***узлу*** *от всех свободных концов*, а затем двигаемся к заделке.

Рис. 30

В-шестых, так называемое правило «С чем пришел, с тем ушел» есть упрощенное изложение следствия из закона статики: «Если тело находится в равновесии, то и любая его часть тоже находится в равновесии». Под частью тела в данном контексте имеется в виду узел (именно узел, а не «угол»). И вновь, законы статики применимы к любым конструкциям.

В-седьмых, что именно понимается под участком? Если часть рамы между узлами, то число моментов по одну сторону от узла вовсе не обязательно равно их числу по другую сторону. Например, если узел нагружен моментом, или если в узле соединяются прямолинейный и криволинейный участки.

В-восьмых, определять расположение сжатых слоев (и, как следствие, расположение эпюры) важно в любых задачах изгиба.

В-девятых, что понимается под «плоскостью, в которой расположен следующий стержень»? Если стержень прямолинеен, то он расположен в бесконечном количестве плоскостей. В частности, в плоскости самой плоскопространственной рамы, в которой, по определению последней, никаких ни внешних, ни, соответственно, внутренних факторов быть не может. А если он криволинеен, то может вообще не лежать ни в одной плоскости, как, например, виток спирали.

В-десятых, что значит «в начало каждого участка переносим все предыдущие силы»? Внешние или внутренние? А если их несколько сотен? И вообще, переносить силу вдоль линии ее действия допустимо только в абсолютно жестких телах. А как «переносить» момент, вообще непонятно.

И, наконец, правило, изложенное в п. 3, есть всего лишь рекомендация (причем не всегда уместная), справедливая для очень частного случая наличия свободных концов и заделки. Не следует забывать, что (плоско)пространственные рамы бывают и замкнутыми, и безопорными. Да и помимо заделки, существует большое количество разных внешних связей.

В задачах №№1 и 2 Семинара №6 постановки задач гласят, в частности «построить эпюры распределения» и «построить эпюры», соответственно. Это разные постановки задачи? Если да, то какой смысл вкладывается в слово «распределение»? А если нет, то зачем это слово нужно?

Переходим к Семинару №7 (Рис. 31). Фраза в пункте «Решение:», безусловно, верна, но вот только расчетная схема ей противоречит. Раз в плоскости рамы нет внешних сил, то зачем запрещать два горизонтальных перемещения правого верхнего конца? Ведь заделка предотвращает кинематическую изменяемость конструкции, а рисунок из-за избыточных и вводящих в заблуждение связей становится громоздким и малопонятным.

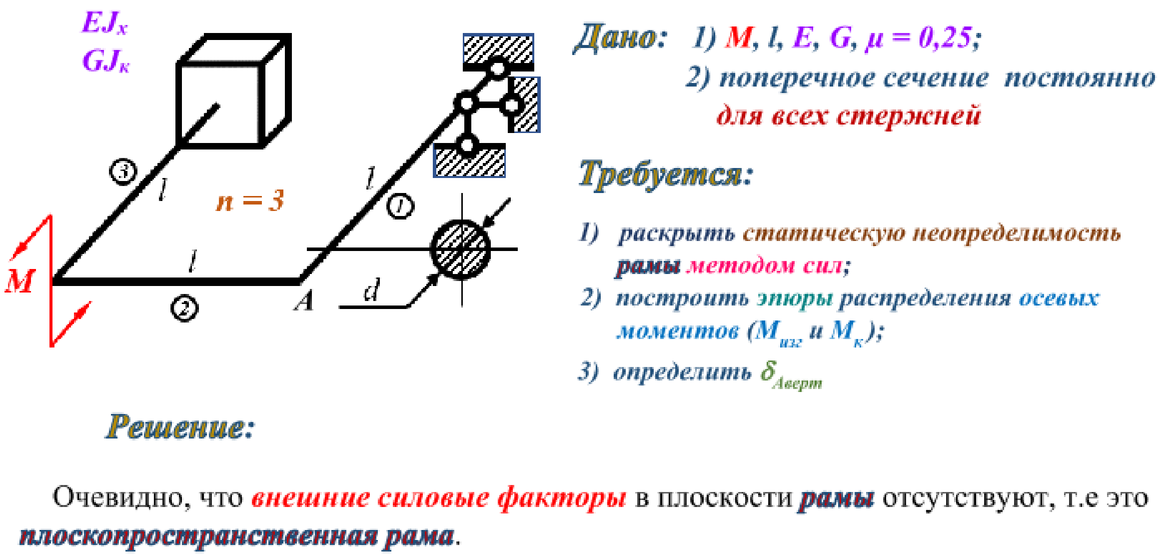


Рис. 31

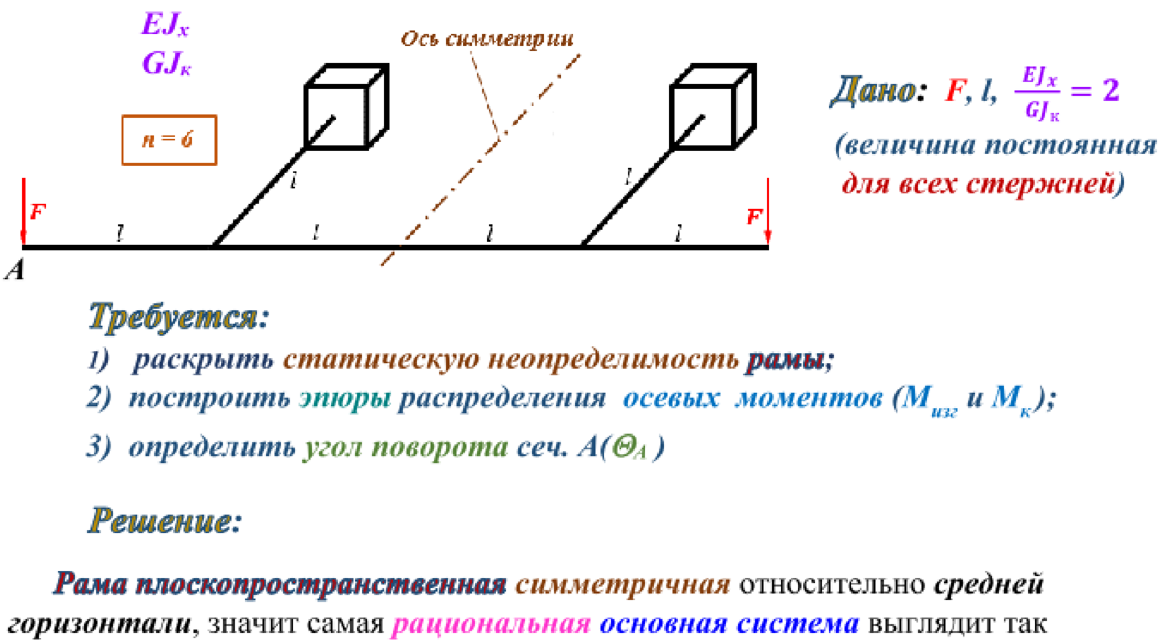


Рис. 32

К Задаче №2 прилагается Рис. 32. Если под «средней горизонталью» понимается плоскость рамы, то относительно нее симметрична (причем косо в упругом смысле) любая плоскопространственная рама, а не только показанная. Хотя есть слабая догадка, что автор просто спутал горизонталь с вертикалью. Если так, то следовало бы добавить «вертикальной плоскости».

Литература

[1] Богачев А. А., Графики, которые убеждают всех, АСТ, 2020

[2] Помазкова Е. И., Информационные технологии: создание мультимедийных презентаций в Microsoft Power Point. Учебно-методическое пособие, Благовещенск, Издательство АмГУ, 2021

[3] Мустафин И. И., Правила создания учебных мультимедийных презентаций: Методические рекомендации, Изд-во КГАСУ, Казань, 2018

[4] Гафаров Р. Х., Жернаков В. С., Что нужно знать о сопротивлении материалов, М., Машиностроение, 2001

[5] Маитуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г., Толковый словарь математических терминов. Пособие для учителей, М., Просвещение, 1965

[6] Феодосьев В. И., Сопротивление материалов, М., Наука, 1986

[7] Поляков А. А. (ред.), Строительная механика: учебное пособие, Екатеринбург, УрФУ, 2018

[8] Beer F. P., Johnston E. R., DeWolf J. T., Mazurek D. F., Mechanics of Materials, 6th edition, McGrowHill, New York, 2012

[9] Биргер И. А., Мавлютов Р. Р., Сопротивление материалов, М., Наука, 1986

[10] Валишвили Н. В., Гаврюшин С. С., Сопротивление материалов и конструкций, М., Юрайт, 2020