Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет: РК
Кафедра: РК5 «Прикладная механика»

Устойчивость сжатых стержней

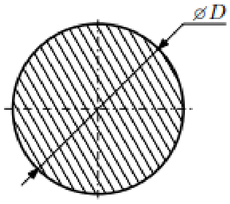
Выполнил студент: **Шоничев И. Д.**
Группа: **МТ11-41Б**
Вариант: **22**
Преподаватель: **Даниленко К. Б.**

Дата: 13.05.2020

Москва, 2020 г.

Устойчивость сжатых стержней

Задача №6



1. Определить коэффициент приведения длины стойки постоянного поперечного сечения энергетическим методом;

2. Вычислить критическую силу по формуле Эйлера;

3. Изобразить примерный вид изогнутой оси стойки.

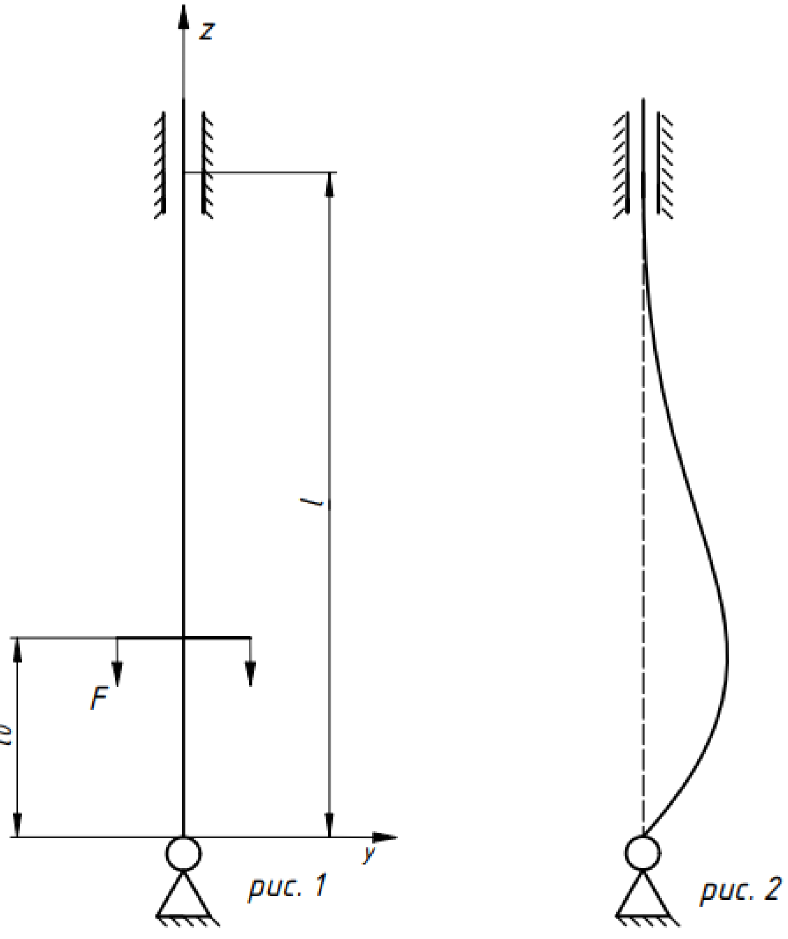
Дано:

$l = 3\text{м},$

$l_0 = \frac{3}{10} l$

$a = 40\text{мм}$

$E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$



Проведем мысленный эксперимент и изобразим стойку после потери устойчивости в положении устойчивого равновесия. Форма стойки после потери устойчивости изображена на рисунке 2. Точка перегиба находится примерно в середине стойки. Тогда $\mu_{\text{эксп}}$ примем за $\mu_{\text{эксп}} \approx 0{,}5$. Это число и будет приблизительным значением искомого коэффициента μ.

Решение:

Введем систему координат (рис 1.).

Аппроксимация $v(z)$ (прогиба) – функцией $y(z)$ – полиномом четвертой степени:

$$y(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

Запишем выражение для $F_{\text{кр}}$ в энергетическом методе:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l EI_x (y'')^2\ dz}{\int_0^{l_0} (y')^2\ dz}$$

Производные $y'(z)$ и $y''(z)$:

$$y'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3$$

$$y''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2$$

Запишем граничные условия:

$$\begin{cases} z = 0 \\ v = 0 \\ M_x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ y'' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = l \\ v = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = l \\ y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} y(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 \\ y'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 \\ y''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2 \end{cases}$$

Из ГУ находим константы:

$$y(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$y''(0) = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

$$\begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 l + a_3 l^3 + a_4 l^4 = 0 \\ a_1 + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 l^2 + a_4 l^3 = 0 \\ a_1 + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 l^2 + a_4 l^3 = \ a_1 + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3 \\ a_1 + a_3 l^2 + a_4 l^3 +\ a_1 + 3a_3 l^2 + 4a_4 l^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_3 + a_4 l = \ 3a_3 + 4a_4 l \\ 2a_1 + 4a_3 l^2 + 5a_4 l^3 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a_3 = -\frac{3}{2} a_4 l \\ a_1 = 3a_4 l^3 - \frac{5}{2} a_4 l^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_3 = -\frac{3}{2} a_4 l \\ a_1 = \frac{1}{2} a_4 l^3 \end{cases}$$

Подставим a_1 и a_3 в систему уравнений:

$$\begin{cases} y(z) = \frac{1}{2}a_4 l^3 z - \frac{3}{2}a_4 l z^3 + a_4 z^4 \\ y'(z) = \frac{1}{2}a_4 l^3 - \frac{9}{2}a_4 l z^2 + 4a_4 z^3 \\ y''(z) = -9a_4 l z + 12a_4 z^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(z) = a_4(\frac{1}{2}l^3 z - \frac{3}{2}l z^3 + z^4) \\ y'(z) = a_4(\frac{1}{2}l^3 - \frac{9}{2}l z^2 + 4z^3) \\ y''(z) = a_4(-9lz + 12z^2) \end{cases}$$

Сделаем проверки по ГУ:

$$y(0) = a_4\left(\frac{1}{2}l^3 \cdot 0 - \frac{3}{2}l \cdot 0^3 + 0^4\right) = 0 \ \blacksquare$$

$$y(l) = a_4\left(\frac{1}{2}l^3 l - \frac{3}{2}l l^3 + l^4\right) = 0 \ \blacksquare$$

$$y'(l) = a_4\left(\frac{1}{2}l^3 - \frac{9}{2}l l^2 + 4l^3\right) = 0 \ \blacksquare$$

$$y''(0) = a_4(-9l \cdot 0 + 12 \cdot 0^2) = 0 \ \blacksquare$$

Проверки сходятся.

Найдем числитель формулы:

$$\int_0^l EI_x (y'')^2 \, dz \ = \int_0^l EI_x (a_4(-9lz + 12z^2))^2 \, dz =$$

$$= EI_x {a_4}^2 \int_0^l (-9lz + 12z^2)^2 \, dz =$$

$$= EI_x {a_4}^2 \int_0^l (144z^4 - 2 \cdot 9 \cdot 12 l z^3 + 81 l^2 z^2) \, dz =$$

$$= EI_x {a_4}^2 (\frac{144}{5}z^5 - \frac{216}{4}l z^4 + \frac{81}{3}l^2 z^3)_0^l =$$

$$= EI_x {a_4}^2 (\frac{144}{5}l^5 - \frac{216}{4}l^5 + \frac{81}{3}l^5) =$$

$$= 1{,}8 \, EI_x {a_4}^2 l^5$$

Найдем знаменатель формулы:

$$\int_0^{l_0} (y')^2 \, dz = \int_0^{l_0} (a_4(\frac{1}{2}l^3 - \frac{9}{2}lz^2 + 4z^3))^2 \, dz =$$

$$= a_4{}^2 \int_0^{l_0} \{(\frac{1}{2}l^3 - \frac{9}{2}lz^2)^2 + 2 \cdot 4z^3 \cdot \left(\frac{1}{2}l^3 - \frac{9}{2}lz^2\right) + 16z^6\} \, dz =$$

$$= a_4{}^2 \int_0^{l_0} \{(\frac{1}{4}l^6 - 2 \cdot \frac{1}{2}l^3 \cdot \frac{9}{2}lz^2 + \frac{81}{4}l^2z^4) + 8z^3 \cdot \left(\frac{1}{2}l^3 - \frac{9}{2}lz^2\right) + 16z^6\} \, dz =$$

$$= a_4{}^2 \int_0^{l_0} \{\frac{1}{4}l^6 - \frac{9}{2}l^4z^2 + \frac{81}{4}l^2z^4 + 4l^3z^3 - 36lz^5 + 16z^6\} \, dz =$$

$$= a_4{}^2 (\frac{1}{4}l^6z - \frac{9}{6}l^4z^3 + \frac{81}{20}l^2z^5 + l^3z^4 - 6lz^6 + \frac{16}{7}z^7)_0^{\frac{3}{10}l} =$$

$$= a_4{}^2 (\frac{1}{4}l^6(0{,}3l) - \frac{9}{6}l^4(0{,}3l)^3 + \frac{81}{20}l^2(0{,}3l)^5 + l^3(0{,}3l)^4 - 6l(0{,}3l)^6 + \frac{16}{7}(0{,}3l)^7) =$$

$$= \{0{,}3 = k\} =$$

$$= a_4{}^2 l^7 (0{,}25k - 1{,}5k^3 + 4{,}05k^5 + k^4 - 6k^6 + \frac{16}{7}k^7) =$$

$$= a_4{}^2 l^7 \left(\frac{3\,399\,717}{70\,000\,000}\right) \approx 0{,}0485674 \cdot a_4{}^2 l^7$$

Получаем:

$$F_{\text{кр}} = 1{,}8 \frac{EI_x a_4{}^2 l^5}{0{,}0485674 \cdot a_4{}^2 l^7} \approx 37{,}0619 \frac{EI_x}{l^2}$$

Формула Эйлера для $F_{\text{кр}}$:

$F_{\text{кр}} = \dfrac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}$, где μ – коэффициент приведения длины.

Найдем μ:

$$\frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = 37{,}0619 \frac{EI_x}{l^2}$$

$$\frac{\pi^2}{\mu^2} = 37{,}0619$$

$$\mu = \sqrt[2]{\frac{\pi^2}{37{,}0619}} = 0{,}516$$

Найдем $F_{\text{кр}}$ по формуле Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_x}{(\mu l)^2} = \left\{ I_x = \frac{\pi d^4}{64} \right\} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \frac{\pi d^4}{64} =$$

$$= \frac{\pi^3 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{МПа} \cdot 40^4 \text{мм}^4}{0{,}516^2 \cdot 3000^2 \text{мм}^2 \cdot 64} = 103{,}5 \text{ кН}$$

Результаты:

$$\mu = 0{,}516$$

$$F_{кр} = 103{,}5\ кН$$

$$вид\ изогнутой\ оси - рис. 2$$

$$\mu \approx \mu_{эксп}$$