Колонна с силой и нагревом

Дана равномерно нагретая колонна, нагруженная силой (Рис. 1, *а*). Необходимо найти силу из условия прочности.

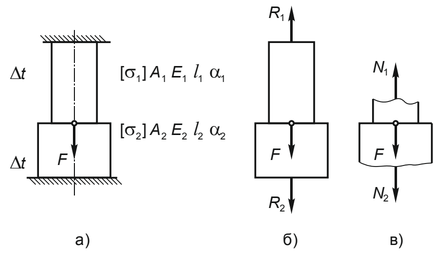

Рис. 1

Отбрасываем связи, заменяя их реакциями, и составляем сумму проекций на вертикаль (Рис. 1, *б*):

$\Sigma F_z = R_1 - F - R_2 = 0$

Две неизвестных входят в одно уравнение – значит, задача единожды статически неопределима.

Нормальные силы направляются от сечения, согласно правилу знаков (Рис. 1, *в*). Тогда

$N_1 = R_1$

$$N_2 = R_2 = N_1 - F \qquad (1)$$

Условие совместности перемещений – общая длина колонны неизменна. Уравнение совместности перемещений:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0 \qquad (2)$$

Обе силы растягивающие, значит, вызывают удлинение и в уравнение входят со знаком «плюс», как и слагаемое, связанное с нагревом:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 l_1 \Delta t; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \alpha_2 l_2 \Delta t \to \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 l_1 \Delta t + \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} + \alpha_2 l_2 \Delta t = 0$$

Заменяя вторую силу на первую согласно (1) и проводя преобразования, получаем:

$$N_1 = \frac{\dfrac{F l_2}{E_2 A_2} - \Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right)}{\dfrac{l_1}{E_1 A_1} + \dfrac{l_2}{E_2 A_2}}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\dfrac{F l_2}{E_2 A_2} - \Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right)}{\dfrac{l_1}{E_1 A_1} + \dfrac{l_2}{E_2 A_2}} \qquad (3)$$

$$N_2 = -\frac{\dfrac{F l_1}{E_1 A_1} - \Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right)}{\dfrac{l_1}{E_1 A_1} + \dfrac{l_2}{E_2 A_2}}$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\dfrac{F l_1}{E_1 A_1} - \Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right)}{\dfrac{l_1}{E_1 A_1} + \dfrac{l_2}{E_2 A_2}} \qquad (4)$$

Условие прочности для первого участка имеет вид

$$\sigma_1 = \left[\sigma_1\right] \qquad (5)$$

откуда после преобразований из формулы (3) следует:

$$\left[F_1\right] = \left\{\Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right) + A_1\left[\sigma_1\right]\left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\right)\right\}\frac{E_2 A_2}{l_2} \qquad (6)$$

здесь $[F_1]$ – внешняя сила, являющаяся допускаемой для первого участка.

Аналогично, для второго участка при

$$\sigma_2 = \left[\sigma_2\right] \qquad (7)$$

из (4) получаем

$$\left[F_2\right] = -\left\{\left(\Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right) + A_2\left[\sigma_2\right]\left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\right)\right)\frac{E_1 A_1}{l_1}\right\} \qquad (8)$$

Наконец, из двух найденных значений силы – $[F_1]$ и $[F_2]$ – нужно взять наименьшее, которое и будет величиной допускаемой силы для всей конструкции.

Далее можно провести ряд проверок. Например, подставив найденную силу в формулы (3) и (4), следует убедиться, что наибольшие по модулю напряжения не превышают допускаемых для соответствующих участков.

Кроме того, можно провести кинематическую проверку, убедившись в соблюдении уравнения совместности перемещений (2).

Однако представленная методика имеет серьёзный изъян. Проанализировав формулу (8), можно заметить, что все переменные, входящие в выражение в фигурных скобках – положительные, а значит, сила $[F_2]$ всегда будет иметь знак «минус».

Это может чисто формально означать, что направление силы нужно изменить на противоположное, однако такой вывод ошибочен. Во-первых, участки равноправны, и, направив силу в обратную сторону, мы всего лишь поменяем участки местами, не повлияв на физическую суть задачи. То есть отрицательное значение силы является решением, лишенным физического смысла.

Во-вторых, изучив расчетную схему Рис. 1, *а*, нетрудно заметить, что второй участок всегда находится в состоянии сжатия. В самом деле, от нагрева колонны, защемленной двумя торцами, во всех её участках возникают сжимающие усилия. Кроме того, сила создаёт растяжение на первом участке и сжатие на втором. Таким образом, при одновременных силовом и температурном нагружениях на первом участке по суперпозиции может быть и растяжение, и сжатие, и – в частном случае – ненагруженное состояние, а вот на втором возникает только сжатие. Соответственно, приравнивать напряжение на втором участке необходимо допускаемому, взятому именно со знаком «минус».

Приведем численный пример. Пусть материал первого участка – сталь, для которой

$\alpha_1 = 1.2\cdot10^{-5}\frac{1}{°\text{C}}$, $E_1 = 2\cdot10^5$ МПа, $[\sigma_1] = 300$ МПа;

а второго – бронза:

$\alpha_2 = 1.7\cdot10^{-5}\frac{1}{°\text{C}}$, $E_2 = 1\cdot10^5$ МПа, $[\sigma_2] = 200$ МПа.

Другие исходные данные:
$l_1 = 100$ мм, $A_1 = 200$ мм^2;
$l_2 = 200$ мм, $A_2 = 100$ мм^2;
$\Delta t = 35$ °C.

Расчёт по представленной методике даёт:
$[F_1] = 75.55$ кН, $[F_2] = -244.4$ кН.

Отказавшись от второй силы как от отрицательной и приняв $F = [F_1] = 75.55$ кН, мы получаем
$N_1 = 60$ кН, $N_2 = -15.55$ кН;
$\sigma_1 = 300$ МПа, $\sigma_2 = -155$ МПа.
то есть в этом случае условие прочности выполнено. Опасный участок – первый.

Увеличив степень нагрева вдвое, то есть приняв $\Delta t = 70$ °C, получаем
$[F_1] = 83.6$ кН, $[F_2] = -308.8$ кН;
$N_1 = 60$ кН, $N_2 = -236$ кН;
$\sigma_1 = 300$ МПа, $\sigma_2 = -236$ МПа.

Видно, что $|\sigma_2| > [\sigma_2]$, то есть условие прочности на втором участке нарушено.

Это говорит о том, что представленная методика не является универсальной. Значит, вместо условий прочности (5) и (7) нужно использовать более общие

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \pm[\sigma_1] \\ \sigma_2 &= \pm[\sigma_2] \end{aligned} \qquad (9)$$

То есть получаем в общем случае четыре условия прочности вместо двух. Правда, воспользовавшись тем, что условие $\sigma_2 = [\sigma_2]$ никогда не будет выполнено (второй участок не может быть в состоянии растяжения), это количество можно снизить до трёх, но мы будем рассматривать все четыре случая.

Применение условий (9) приводит к тому, что в формулах (6) и (8) второе слагаемое надо рассматривать и с положительным, и с отрицательным знаками, то есть

$$[F_1] = \left\{\Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right) \pm A_1[\sigma_1]\left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\right)\right\}\frac{E_2 A_2}{l_2}$$

$$[F_2] = -\left\{\Delta t\left(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2\right) \pm A_2[\sigma_2]\left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2}\right)\right\}\frac{E_1 A_1}{l_1}$$

Тогда в первом случае (при нагреве на 35 °С) вначале положим $\sigma_1 = -[\sigma_1]$ и получим $[F_1]$ = –59.45 кН. Отбрасываем этот результат как противоречащий постановке задачи.
Теперь примем $\sigma_1 = [\sigma_1]$, что даёт $[F_1]$ = 75.55 кН.
Этот результат уже был получен выше, но теперь расчёт более корректен.
Аналогично для второго участка при $\sigma_2 = -[\sigma_2]$ находим $[F_2]$ = 115.6 кН, а при $\sigma_2 = [\sigma_2]$ имеем ранее вычисленный результат $[F_2]$ = –244.4 кН, который также следует отбросить, как и предполагалось.
Получили два положительных значения силы: $[F_1]$ = 75.55 кН и $[F_2]$ = 115.6 кН, из которых выбираем наименьшее. Отметим, что для второго значения допускаемой силы на первом участке нарушается условие прочности.
Окончательно приняв $[F]$ = 75.55 кН, получаем
N_1 = 60 кН (растяжение), N_2 = –15.55 кН (сжатие);
σ_1 = 300 МПа, σ_2 = –155.5 МПа.
Кинематическая проверка показывает, что Δl_1 = 0.192 мм (удлинение), Δl_2 = –0.192 мм (укорочение), то есть условие совместности перемещений (2) также выполнено. Опасный участок – первый.

Теперь положим Δt = 70 °С:
$\sigma_1 = -[\sigma_1]$, что даёт $[F_1]$ = –51.4 кН (отбрасываем);
$\sigma_1 = [\sigma_1]$, $[F_1]$ = 83.6 кН (принимаем);
$\sigma_2 = -[\sigma_2]$, $[F_2]$ = 51.2 кН (принимаем);
$\sigma_2 = [\sigma_2]$, $[F_2]$ = –308.8 кН (отбрасываем).
F = min(83.6, 51.2) = 51.2 кН;
N_1 = 31.2 кН (растяжение), N_2 = –20 кН (сжатие);
σ_1 = 156 МПа, σ_2 = –200 МПа;
Δl_1 = 0.162 мм (удлинение), Δl_2 = –0.162 мм (укорочение). Опасный участок – второй.

При Δt = 90 °С:
F = min(88.2, 14.4) = 14.4 кН;
σ_1 = –28 МПа, σ_2 = –200 МПа. $|\Delta l_i|$ = 0.094 мм. Вся колонна сжата. Опасный участок – второй.

Еще один случай следует рассмотреть особо: Δt = 100 °С. Из четырёх значений силы положительными оказываются не два, как раньше, а одно: при $\sigma_1 = [\sigma_1]$ получаем $[F_1]$ = 90.5 кН. Казалось бы, единственное решение получено, но оказывается, что σ_2 = –305 МПа, то есть условие прочности не выполнено.
Задача при таком нагреве действительно не имеет решения, потому что даже при F = 0 напряжение на втором участке по модулю превышает допускаемое: σ_2 = –204.44 МПа.

Данная методика работает и в более общем случае, когда материал имеет разные допускаемые напряжения при растяжении и сжатии. Рассматриваем три условия прочности:
$\sigma_1 = [\sigma_1^+]$
$\sigma_1 = -[\sigma_1^-]$
$\sigma_2 = -[\sigma_2^-]$
Условие $\sigma_2 = [\sigma_2^+]$ формально имеет смысл, но может не применяться.
Найдя три значения силы, отбрасываем отрицательные, а из оставшихся в качестве решения принимаем наименьшее.