

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.М. Гуськов, С.В. Ярьско

**Анализ колебаний
консервативных
нелинейных систем
с одной степенью
свободы**

*Рекомендовано научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия*

Москва

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

2013

УДК 531.37(075.8)
ББК 22.213
Г96

Рецензенты: *Г.Я. Пановко, А.А. Головин*

Гуськов А.М.
Г96 Анализ колебаний консервативных нелинейных систем с одной степенью свободы: учеб. пособие / А.М. Гуськов, С.В. Ярьско. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. — 41, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-3650-7

Представлены системы с зазорами и системы с упругими элементами, имеющими начальные напряжения. Подробно рассмотрено построение кусочно-линейной силовой характеристики таких систем. Даны методы получения зависимости частоты колебаний от амплитуды на основе как точного решения по методу припасовывания, так и приближенного решения с помощью прямой линеаризации силовой характеристики упругой системы. Сравнение точного и приближенного решений позволяет оценить возможности широко применяемых на практике методов линеаризации нелинейных систем.

Для студентов 3-го курса механических специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих первую часть курсов «Аналитическая динамика и теория колебаний» и «Теория механических колебаний».

УДК 531.37(075.8)
ББК 22.213

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представленное учебное пособие по теории нелинейных колебаний систем с одной степенью свободы предназначено для студентов механических специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана. По традиции этот раздел относится к первой части курсов «Аналитическая динамика и теория колебаний» и «Теория механических колебаний», изучаемых после освоения полного курса «Теоретическая механика».

В результате изучения свободных колебаний консервативных систем с кусочно-линейной силовой характеристикой студенты должны достичь понимания ангармонизма колебаний нелинейных систем.

Учебные задачи, включенные в пособие, предполагают обязательную выработку навыков вывода уравнений нелинейных силовых характеристик для комбинированных упругих систем. В пособии рассмотрены системы с зазорами и системы с упругими элементами, имеющими начальные напряжения. Зависимость частоты колебаний от амплитуды необходимо вычислить как на основе анализа точного решения, полученного методом припасовывания, так и приближенно, применяя метод прямой линеаризации силовой характеристики упругой системы. Сравнение точного и приближенного решений позволяет оценить возможности широко применяемых на практике методов линеаризации нелинейных систем.

Для более полного изучения теории нелинейных колебаний можно рекомендовать учебники и монографии, приведенные в списке литературы [1 – 8].

ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассмотрены механические системы, имеющие лагранжиан и уравнение движения соответственно

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q) \Rightarrow m \ddot{q} = - \frac{\partial U(q)}{\partial q}, \quad (1)$$

где q и m — обобщенные координата и масса системы; $\dot{q} = dq / dt$.

Зависимость $F(q) = \partial U(q) / \partial q$ называют *силовой характеристикой упругого элемента*, если потенциальная энергия $U(q)$ есть энергия деформации конструкции, удерживающей обобщенную массу m . (В специальной литературе часто употребляют неудачный термин «упругая характеристика», чтобы подчеркнуть, что речь идет об упругом элементе.)

Предполагается, что в состоянии $\{q = 0, \dot{q} = 0\}$ система находится в устойчивом положении равновесия:

$$\left. \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right|_{q=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2} \right|_{q=0} > 0. \quad (2)$$

Следовательно, свободные движения системы вблизи положения равновесия имеют колебательный характер и фазовые траектории $\dot{q}(q)$ являются замкнутыми.

Один оборот по траектории осуществляется за время, называемое периодом колебаний T . Первый интеграл рассматриваемых систем имеет смысл полной энергии

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + U(q) = E_0, \quad (3)$$

т. е. для движений, удовлетворяющих уравнению (1), $dE(q, \dot{q})/dt \equiv \equiv 0$. Постоянная интегрирования E_0 определяется начальными условиями. Если упругая характеристика симметричная, т. е. $U(q) = U(-q)$ и $F(q) = -F(-q)$, то фазовые траектории имеют симметричный вид относительно осей $\{q, \dot{q}\}$ — рис. 1.

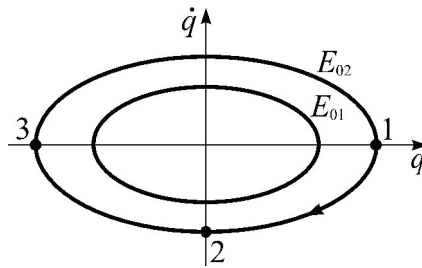


Рис. 1. Фазовые траектории консервативной системы
вблизи положения устойчивого равновесия $\{q = 0, \dot{q} = 0\}$ $E_{02} > E_{01}$

Проинтегрируем вдоль четверти полного оборота (от точки 1 до точки 2, см. рис. 1), уравнение (3), которое на этом участке можно представить в виде $dt = -dq / \sqrt{2/m[E_0 - U(q)]}$. Поскольку в точке 1 при $t = 0$ имеем $E_0 = U(A)$, то

$$T(A) = 4 \int_0^A \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}[U(A) - U(q)]}}; \quad \omega(A) = \frac{2\pi}{T(A)}, \quad (4)$$

при этом наибольшее отклонение называют *амплитудой колебания* $A = \max(q): \{(q(0) = A, \dot{q}(0) = 0), (q(T/2) = -A, \dot{q}(T/2) = 0)\}$. Если известна силовая характеристика $F(q)$, то потенциальную энергию определяют как

$$U(q) = U(0) + \int_0^q F(x) dx \Rightarrow U(A) - U(q) = \int_q^A F(x) dx. \quad (5)$$

Интеграл (4) в общем случае находят численно. Для линейных систем $F(q) = cq$, $U(q) = cq^2/2 + C$ и возможно интегрирование в

замкнутой форме. Период колебаний не зависит от амплитуды: $T = 2\pi\sqrt{m/c}$. Такие колебания называют *изохронными*. Параметр c называют *жесткостью характеристики*. Жесткость нелинейных систем является локальной характеристикой и определяется как тангенс угла наклона силовой характеристики к оси q : $c(q) = dF(q)/dq$. Характеристику с возрастающей жесткостью ($dc(q)/dq > 0, q > 0$) называют *жесткой*, с убывающей жесткостью ($dc(q)/dq < 0, q > 0$) — *мягкой*.

В общем случае уравнение движения имеет вид $m d^2q/dt^2 = -F(q)$. Если ввести новый масштаб времени $t \leftarrow t/\sqrt{F_0/mq_0}$, где $\{F_0, q_0\}$ — характерные значения силы и положения, то движение системы будет описываться безразмерным уравнением $d^2x/dt^2 = -f(x)$, $x = q/q_0$, $f = F/F_0$. Так как рассматриваемые системы консервативны, а нулевое положение устойчиво, все траектории движения являются замкнутыми, т. е. осуществляются периодические движения с частотой колебаний, зависящей от начальных условий: $\omega = h(x|_{t=0}, dx/dt|_{t=0})$. Выбирая в дальнейшем начальные условия вида $\{x|_{t=0} = A, dx/dt|_{t=0} = 0\}$, будем называть начальное отклонение A амплитудой колебаний. При этом предполагаем, что упругая характеристика является симметричной. Для получения размерных частоты и амплитуды нужно выполнить обратное преобразование: $\omega \leftarrow \omega\sqrt{F_0/mq_0}$, $A \leftarrow Aq_0$.

Данное учебное пособие посвящено определению зависимости частоты колебаний от амплитуды $\omega(A)$. По традиции эту зависимость называют *скелетной кривой* для соответствующей колебательной системы. Иногда удобнее рассматривать обратную функцию $A(\omega)$. Для жесткой характеристики частота свободных колебаний возрастает с увеличением амплитуды, для мягкой — убывает. Принципиальный вид этих функций показан на рис. 2.

При исследовании реальных нелинейных систем одну из основных трудностей представляет получение силовой характеристики. В первом разделе пособия дан обзор различных типов силовых характеристик консервативных нелинейных систем. Второй раздел посвящен балочным системам с предварительно поджаты-

ми упругими опорами. Силовые характеристики таких систем являются мягкими кусочно-линейными. Балочные системы с упругими опорами при наличии зазоров подробно рассмотрены в третьем разделе. Такие системы обладают жесткими кусочно-линейными силовыми характеристиками.

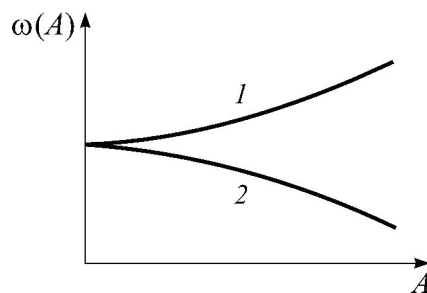


Рис. 2. Общий вид зависимости частоты свободных колебаний от амплитуды для жесткой (кривая 1) и мягкой (кривая 2) систем

В четвертом разделе настоящего пособия изложено точное решение задачи о свободных колебаниях систем с кусочно-линейными силовыми характеристиками на основе метода припасовывания.

В пятом разделе пособия рассмотрены вопросы практического применения различных методов линеаризации нелинейных систем.

В приложении содержатся требования к выполнению домашнего задания по рассмотренной тематике. Представлены 24 принципиальные расчетные схемы и исходные данные для 72 вариантов домашнего задания.

1. ПРОСТЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. ОСНОВНЫЕ РАЗНОВИДНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК

Изучение колебаний любой механической системы невозможно без знания ее характеристики, т. е. зависимости между обобщенным перемещением и обобщенной силой, соответствующей этому перемещению. Такая зависимость может быть получена двумя путями:

1) аналитически — в результате *рассмотрения статического равновесия* системы под действием обобщенной силы (для достаточно простых систем);

2) экспериментально — *непосредственным измерением* статического обобщенного перемещения под действием обобщенной силы (для особо сложных систем).

Полученная характеристика может быть представлена в виде графика или формулы. При экспериментальном определении характеристики формула является результатом той или иной аппроксимации экспериментальных данных. Представление характеристики в виде формулы необходимо при аналитическом изучении колебаний системы.

На рис. 3 представлены простые нелинейные механические колебательные системы с одной степенью свободы и показаны графики их характеристик.

На рис. 3, а изображена каретка, которая может смещаться в горизонтальном направлении без трения. В центре масс каретка шарнирно скреплена с имеющей жесткость c пружиной, длина которой по вертикали равна l при силе предварительного натяжения N_0 . Горизонтальная (обобщенная) сила F связана с горизонтальным (обобщенным) перемещением x зависимостью

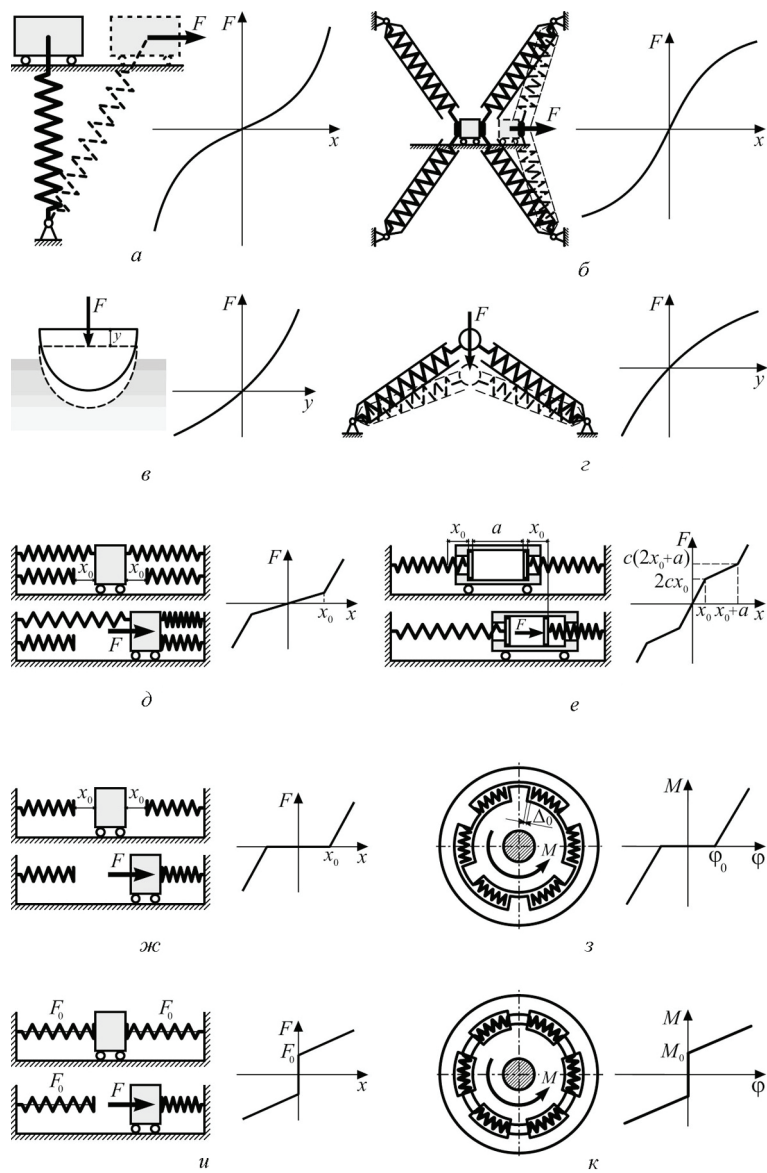


Рис. 3. Разновидности нелинейных характеристик простых механических колебательных систем с одной степенью свободы

$$F = cx + \frac{(N_0 - cl)x}{\sqrt{x^2 + l^2}}, \quad (6)$$

которая при значении x , достаточно малом по сравнению со значением l , принимает вид

$$F = N_0 \frac{x}{l} + \frac{1}{2}(cl - N_0) \frac{x^3}{l^3}. \quad (6a)$$

Вывод выражений (6) и (6a) подробно рассмотрен в [8, § 6]. Смена знака x влечет за собой и смену знака F при сохранении соотношения между их абсолютными величинами, т. е. характеристика *симметричная*. Симметрия характеристики является отражением симметрии системы относительно вертикали $x = 0$. Вторая производная силы F по перемещению x является величиной положительной:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{N_0}{l} + \frac{3}{2} \left(c - \frac{N_0}{l} \right) \frac{x^2}{l^2} > 0; \quad \frac{d^2F}{dx^2} = 3 \left(c - \frac{N_0}{l} \right) \frac{x}{l^2} > 0, \quad (6b)$$

что легко заметить на рис. 3, а, где наклон кривой $F(x)$ постепенно увеличивается с ростом абсолютной величины x . Характеристику, имеющую положительную вторую производную силы по перемещению, называют *жесткой*.

На рис. 3, б показана подобная изображенной на рис. 3, а каретка, расположенная без зазора между двумя одинаковыми упругими элементами. Каждый элемент симметричен относительно горизонтали, проходящей через центр масс каретки, и состоит из двух шарнирно скрепленных в нейтральном положении пружин, имеющих жесткость c и длину l . Пружины помещены в шарнирно опертые одним краем жесткие трубки, не допускающие искривления осей пружин при смещении каретки. Наклон пружин к горизонтали в нейтральном положении равен α . Аналитическое выражение характеристики

$$F = 2c(l \cos \alpha - x) \left[\frac{l}{\sqrt{x^2 - 2xl \cos \alpha + l^2}} - 1 \right] \quad (7)$$

выводят аналогично выражению (6). При x , достаточно малом по сравнению с l , зависимость принимает вид

$$F = 2cx \left[\cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \frac{x}{l} \sin \alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} (\sin^4 \alpha - \sin^2 2\alpha) \right]. \quad (7a)$$

Легко видеть, что выражения (6) и (6а) при $N_0 = 0$ есть частный случай выражений (7) и (7а) при $\alpha = \pi/2$ и половинной жесткости пружин. Отметим, что в выражениях (7) и (7а) значение x не может быть меньше нуля. Дело в том, что упругие элементы не соединены с кареткой, поэтому правый элемент работает только при смещении каретки вправо (см. рис. 3, б), и выражения, полученные при рассмотрении его статического равновесия, пригодны только в этом случае. При смещении каретки влево нужно использовать эти же выражения, заменив F и x их модулями. Характеристика системы *симметричная*, что является отражением симметрии самой системы относительно вертикали $x = 0$. Вторая производная силы F по перемещению x отрицательна:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= c \left[2 \cos^2 \alpha - 3 \frac{x}{l} \sin \alpha \sin 2\alpha + 3 \frac{x^2}{l^2} (\sin^4 \alpha - \sin^2 2\alpha) \right] > 0; \\ \frac{d^2F}{dx^2} &= \frac{c}{l} \left[6 \frac{x}{l} (\sin^4 \alpha - \sin^2 2\alpha) - 3 \sin \alpha \sin 2\alpha \right] < 0. \end{aligned} \quad (76)$$

Об этом свидетельствует также рис. 3, б, где наклон кривой $F(x)$ постепенно уменьшается с ростом абсолютной величины x . Характеристику, имеющую отрицательную вторую производную силы по перемещению, называют *мягкой*.

На рис. 3, в показан плавающий жесткий стержень с криволинейным симметричным относительно вертикали сечением под действием вертикальной силы F , приложенной вдоль оси симметрии. При одинаковых приращениях вертикального перемещения y приращения силы F , уравновешивающие выталкивающую силу, равную произведению удельного веса жидкости и приращения погруженного объема стержня, должны быть тем больше, чем больше значение y . Характеристика системы *жесткая несимметричная*.

На рис. 3, г изображен упругий элемент, подобный приведенным на рис. 3, б, но скрепленный с массой, имеющей только вер-

тикальное перемещение y , отсчитываемое от положения равновесия системы при $F=0$. Характеристика системы определяется выражениями (7) и (7а) при замене x на y и распространении действия этих выражений на отрицательные значения аргумента, т. е. она *мягкая несимметричная*.

Показанная на рис. 3, д каретка скреплена в нейтральном положении с пружинами, имеющими жесткость c , расположена симметрично с зазором x_0 между двумя пружинами, имеющими жесткость $3c$. Очевидно, что при $|x| < x_0$ жесткость системы равна $2c$, а при $|x| > x_0$ она составляет $5c$. Характеристика системы *кусочно-линейная жесткая симметричная*.

На рис. 3, е показаны жесткие диски, находящиеся во внутренней полости каретки, скрепленные с пружинами, имеющими жесткость c . При сборке системы каждая пружина растянута на x_0 . Пока абсолютная величина смещения x каретки меньше величины предварительного натяжения x_0 , обе пружины работают на растяжение. Очевидно, что при $|x| < x_0$ жесткость системы равна $2c$. При $x_0 < |x| < x_0 + a$, где a — размер внутренней полости каретки за минусом толщин дисков, одна пружина исключается из работы, оставаясь в нейтральном положении. Жесткость системы равна c .

При $|x| > x_0 + a$ вновь работают обе пружины (одна на растяжение, другая на сжатие) и жесткость системы опять равна $2c$. Характеристика системы *кусочно-линейная симметричная (мягкая при $x_0 < |x| < x_0 + a$, мягко-жесткая при $|x| > x_0 + a$)*.

На рис. 3, ж показан случай, аналогичный изображенному на рис. 3, д, но верхняя пара пружин отсутствует. При $|x| < x_0$ жесткость системы равна нулю, а при $|x| > x_0$ она составляет $3c$. Характеристика системы *кусочно-линейная вырожденная жесткая симметричная*. Аналогичную характеристику имеет и пружинная муфта с зазорами, показанная на рис. 3, з и служащая для соединения частей вала, одна из которых жестко связана с внешней полумуфтой, а другая — с внутренней. Подробный вывод выражения для характеристики муфты:

$$M = cnr^2(\varphi - \varphi_0), \quad \varphi > \varphi_0, \quad (8)$$

где n — число пружин; c — жесткость; r — радиус крепления пружин, приведен в [8, § 6].

На рис. 3, и каретка помещена без зазора между двумя пружинами, имеющими жесткость c , предварительно поджатыми силой F_0 . Очевидно, что при $|F| < F_0$ жесткость системы равна бесконечности ($x = 0$), а при $|F| > F_0$ она составляет c . Характеристика системы *кусочно-линейная вырожденная мягкая симметричная*. Аналогичную характеристику имеет и пружинная муфта с предварительным поджатием пружин, показанная на рис. 3, к. Вывод выражения для характеристики муфты:

$$M = cnr^2\varphi + M_0, \quad M > M_0 = nP_0r, \quad (9)$$

где n — число пружин; c — жесткость; r — радиус крепления пружин; P_0 — сила предварительного поджатия пружин, подробно рассмотрен в [8, § 6]. Там же приведены другие примеры простых нелинейных механических колебательных систем с одной степенью свободы.

В реальных конструкциях машин часто используются колебательные системы на основе стержневых упругих элементов, работающих на изгиб.

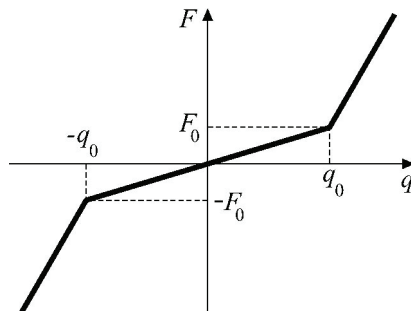


Рис. 4 Общий вид симметричной кусочно-линейной характеристики

В сочетании с различными типами опор (жесткими, упругими, с предварительным поджатием, установленными с зазором и без зазора, симметрично и асимметрично оси стержня) такие упругие элементы позволяют реализовать очень широкий спектр нелинейных характеристик, среди которых наиболее широко распространены симметричные кусочно-линейные. Общий вид таких харак-

теристик показан на рис. 4, а наиболее удобная аналитическая форма записи выглядит следующим образом:

$$F(q) = \begin{cases} k_1 q & \text{при } |q| \leq q_0, \\ k_2 q + (k_1 - k_2) q_0 \operatorname{sign} q & \text{при } |q| > q_0; \end{cases} \quad (10)$$

$$F_0 = k_1 q_0,$$

где q — обобщенное перемещение системы; k_1 и k_2 — жесткости (коэффициенты наклона) соответственно первого и второго от начала координат участков характеристики. При $k_1 < k_2$ выражение (10) описывает жесткую характеристику, а при $k_1 > k_2$ — мягкую, т. е. оно применимо в обоих случаях.

Получение характеристик для систем с упругим каркасом балочного типа, включающим различные виды опор, рассмотрено ниже.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА БАЛКИ С УПРУГИМИ ОПОРАМИ, В ТОМ ЧИСЛЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОДЖАТЫМИ

Рассмотрим изображенную на рис. 5, а консервативную механическую систему с одной степенью свободы. Аналогичная система предложена в одном из вариантов домашнего задания и отличается только числовыми значениями параметров. Упругий каркас системы — это балка с изгибной жесткостью EI , имеющая:

- идеальную шарнирную опору на левом крае;
- две упругие опоры с предварительным поджатием Δ (сила предварительного сжатия P) и податливостью $\delta = 1/k_\Delta$ (линейная жесткость k_Δ), установленные без зазора на расстоянии l от левого края и ограничивающие вертикальные смещения балки вверх и вниз;
- упругую опору, имеющую жесткость k , сходную со спиральной пружиной часового баланса и ограничивающую угол поворота сечения балки на правом крае, не влияя на его смещения по вертикали.

Такое же опиранье правого края может быть реализовано посредством двух горизонтальных пружин, закрепленных в подвижных заделках и соединенных с имеющими высоту e жесткими выступами балки (рис. 5, б). В вариантах домашнего задания

используется только схема, показанная на рис. 5, *a*, так как она проще и требует задания меньшего числа исходных данных.

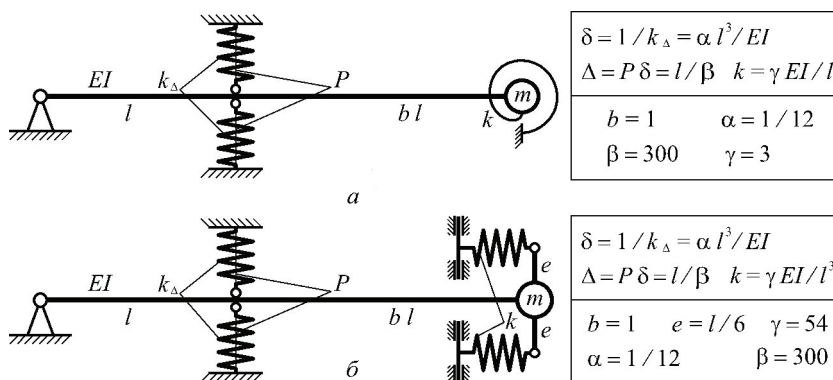


Рис. 5. Примеры (*a*, *б*) динамической системы с одной степенью свободы и мягкой кусочно-линейной характеристикой упругой системы

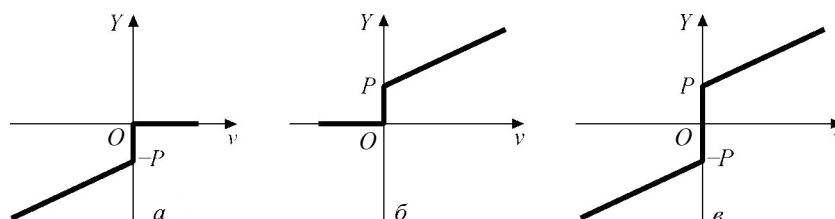


Рис. 6. Характеристики предварительно поджатых упругих опор

Нелинейность системы обусловлена наличием предварительно поджатых упругих опор. Закрепление опор, обеспечивающее силу предварительного поджатия, делает действие нижней и верхней опор односторонним (рис. 6, *a* и *б* соответственно). Но их сочетание можно рассматривать как один упругий элемент с кусочно-линейной вырожденной мягкой симметричной характеристикой (рис. 6, *в*). Здесь v — перемещение опертого сечения балки; Y — сила, действующая на опору со стороны балки.

Аналитическая форма записи характеристики данного сочетания предварительно поджатых упругих опор имеет вид

$$\begin{cases} v=0 & \text{при } |Y| \leq P; \\ v = Y\delta - \Delta \operatorname{sgn}(v) \text{ (а) или } Y = (v + \Delta \operatorname{sgn}(v)) / \delta \text{ (б)} & \text{при } |Y| \geq P, \end{cases} \quad (11)$$

где Y — сила; v — смещение; δ — податливость; $\Delta = P\delta$ — предварительное поджатие упругого элемента.

Принимая за обобщенную координату q вертикальное перемещение сечения балки в точке крепления массы, получим характеристику упругой системы $F(q)$ для каждого из случаев (11).

Отделим массу от упругого каркаса, как это показано на рис. 7.

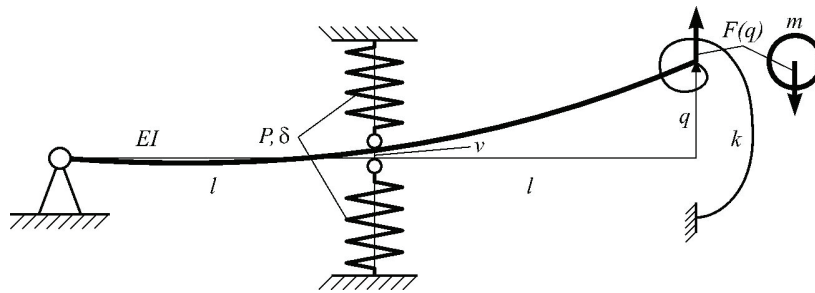


Рис. 7. Упругий каркас и масса, отделенные друг от друга

Примем, что обобщенное перемещение q и сила $F(q)$, действующая со стороны массы на упругий каркас, направлены вверх. Тогда сила воздействия упругого каркаса на массу согласно третьему закону Ньютона направлена вниз и равна $-F(q)$. Уравнение движения массы согласно второму закону Ньютона имеет вид

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = -F(q). \quad (12)$$

Определив перемещение q из рассмотрения равновесного деформирования безынерционного упругого каркаса под действием силы F , получим зависимость $F(q)$. Для упрощения отыскания перемещений отделим нелинейный упругий элемент, оставшаяся часть упругого каркаса является линейной (рис. 8).

Зависимость $Y(v)$ силы взаимодействия балки с упругим нелинейным элементом от вертикального перемещения сечения балки в точке контакта показана на рис. 6, в и выражается формулами

(11). Вызванная действием двух сил (F и Y) деформация линейной части упругого каркаса подчиняется принципу суперпозиции (принцип независимости действия сил), поэтому перемещения характерных сечений $q(F, Y)$ и $v(F, Y)$ могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} q = \delta_{qq}F - \delta_{qv}Y; \\ v = \delta_{vq}F - \delta_{vv}Y, \end{cases} \quad (13)$$

где δ_{kj} — взаимные податливости (рис. 9).

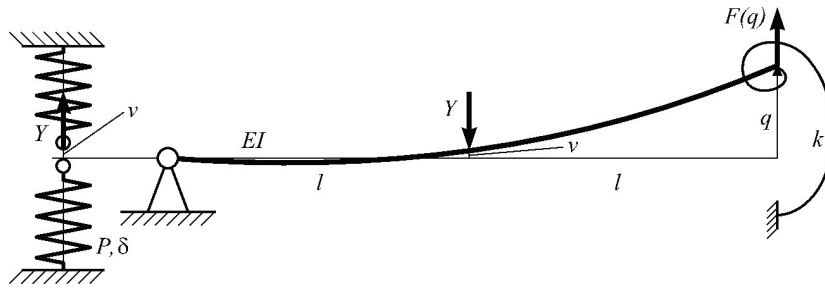


Рис. 8. Нелинейный упругий элемент и линейная часть упругого каркаса

Матрица податливостей δ является симметричной и положительно определенной:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{qq} & \delta_{qv} \\ \delta_{vq} & \delta_{vv} \end{bmatrix}; \quad \delta_{vq} = \delta_{qv}; \quad D = \det \delta = \delta_{qq} \delta_{vv} - \delta_{vq} \delta_{qv} > 0. \quad (14)$$

Отметим, что при наличии упругих опор в расчете податливостей следует учитывать не только деформацию самой балки, но и деформации упругих опор. То есть в общем случае формулы для вычисления податливостей помимо интеграла Мора от произведения соответствующих изгибающих моментов, деленного на изгибную жесткость балки, должны включать в себя также сумму произведений соответствующих реакций упругих опор, деленных на жесткости (умноженных на податливости) этих опор:

$$\delta_{kj} = \int_L \frac{M_{xk} M_{xj}}{EI_x} dz + \sum_{i=1}^n \frac{R_{ik} R_{ij}}{c_i}, \quad (15)$$

где $M_{xk(j)}$, — изгибающий момент в балке; $R_{ik(j)}$ — реакция i -й опоры от единичной нагрузки, приложенной по направлению $k(j)$; EI_x — изгибная жесткость балки; c_i — жесткость i -й опоры; n — число упругих опор.

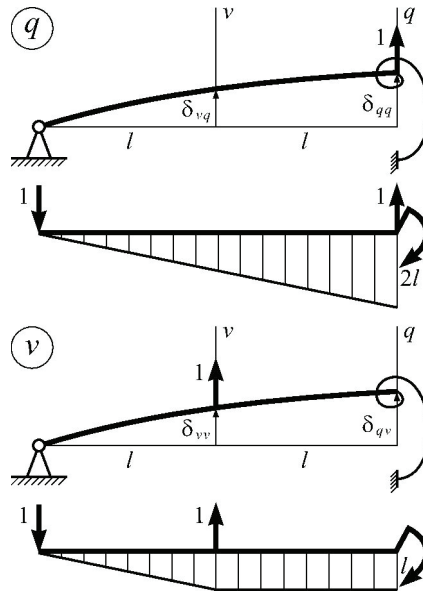


Рис. 9. Эпюры для определения взаимных податливостей

На рис. 9 показаны реакции (сила в левой опоре и момент в правой опоре) и эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузок, приложенных по направлениям q и v к системе, схема и параметры которой заданы на рис. 5.

Применив формулу (15), получим следующие выражения для податливостей:

$$\delta_{qq} = \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\right) \frac{l^3}{EI_x} = 4 \frac{l^3}{EI_x}; \quad \delta_{qv} = \left(\frac{11}{6} + \frac{2}{3}\right) \frac{l^3}{EI_x} = \frac{5}{2} \frac{l^3}{EI_x};$$

$$\delta_{vv} = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right) \frac{l^3}{EI_x} = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EI_x}; \quad D = \left(4 \cdot \frac{5}{3} - \frac{25}{4}\right) \frac{l^6}{(EI_x)^2} = \frac{5}{12} \frac{l^6}{(EI_x)^2}.$$
(16)

Зависимость $F(q)$ (характеристику системы) получим, решив систему уравнений (8) при различных значениях параметров. Пока сила F достаточно мала, мала и реакция Y (см. рис. 8). Таким образом, реализуется случай, соответствующий первому уравнению системы (11), т. е. $v = 0$. Тогда из (8) следует, что

$$Y = \frac{\delta_{vq}}{\delta_{vv}} F = \frac{3}{2} F; \quad q = \frac{D}{\delta_{vv}} F = \frac{1}{4} \frac{l^3}{EI_x} F; \quad Y = \frac{\delta_{vq}}{D} q = 6 \frac{EI_x}{l^3} q. \quad (17)$$

Коэффициент жесткости первого участка характеристики (10) системы

$$k_1 = \frac{\delta_{vv}}{D} = 4 \frac{EI_x}{l^3}. \quad (18)$$

Значения силы F_0 и смещения q_0 на стыке участков характеристики (см. рис. 4) найдем из условия, что сила взаимодействия балки с упругим нелинейным элементом Y становится равной силе начального поджатия упругого элемента P . В соответствии с рис. 5, а значение силы начального поджатия равно $P = EI_x / (25l^2)$. Из (17) получим соотношения

$$F_0 = \frac{\delta_{vv}}{\delta_{vq}} P = \frac{2}{3} P = \frac{2}{75} \frac{EI_x}{l^2}; \quad q_0 = \frac{D}{\delta_{vq}} P = \frac{1}{6} \frac{l^3}{EI_x} P = \frac{l}{150}. \quad (19)$$

Если сила F превысит значение F_0 , то сила Y станет больше силы начального поджатия P нелинейного упругого элемента и зажатая пружина начнет деформироваться. Это соответствует второму уравнению системы (11), и система уравнений (13) принимает вид

$$\begin{cases} q = \delta_{qq} F - \delta_{qv} Y; \\ \delta(Y - P) = \delta_{vq} F - \delta_{vv} Y. \end{cases} \quad (20)$$

Из второго уравнения системы (20) получим

$$Y = \frac{\delta_{vq}}{\delta_{v\Sigma}} F + \frac{\delta}{\delta_{v\Sigma}} P = \frac{10}{7} F + \frac{1}{21} P,$$

где $\delta_{v\Sigma} = \delta_{vv} + \delta = \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{12}\right) \frac{l^3}{EI_x} = \frac{7}{4} \frac{l^3}{EI_x}$ — полная податливость системы по направлению v , равная сумме податливостей балки и пружины нелинейного упругого элемента.

Заметим, что $\delta_{qq} \delta_{v\Sigma} - \delta_{vq}^2 = \delta_{qq} \delta + D$. Тогда из первого уравнения системы (20) следует, что

$$\left\{ \begin{aligned} q &= \left[\delta_{qq} - \frac{\delta_{vq}^2}{\delta_{v\Sigma}} \right] F - \frac{\delta_{vq} \delta}{\delta_{v\Sigma}} P = \\ &= \left\{ \left[4 - \frac{25 \cdot 4}{4 \cdot 7} \right] F - \frac{5 \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 12 \cdot 7} P \right\} \frac{l^3}{EI_x} = \left[\frac{3}{7} F - \frac{5}{42} P \right] \frac{l^3}{EI_x}; \\ F &= \frac{\delta_{v\Sigma}}{\delta_{qq} \delta + D} q + \frac{\delta_{vq} \delta}{\delta_{qq} \delta + D} P = \\ &= \frac{7 \cdot 12}{4(4 \cdot 1 + 5)} \frac{EI_x}{l^3} q + \frac{5 \cdot 1 \cdot 12}{2 \cdot 12 \cdot 9} P = \frac{7}{3} \frac{EI_x}{l^3} q + \frac{5}{18} P. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Коэффициент жесткости второго участка характеристики (10)

$$k_2 = \frac{\delta_{v\Sigma}}{\delta_{qq} \delta + D} = \frac{7}{3} \frac{EI_x}{l^3}. \quad (22)$$

Разность жесткостей второго и первого участков упругой характеристики составляет

$$k_1 - k_2 = \left(4 - \frac{7}{3} \right) \frac{EI_x}{l^3} = \frac{5}{3} \frac{EI_x}{l^3}. \quad (23)$$

Таким образом, получаем следующую характеристику системы:

$$F(q) = \begin{cases} 4 \frac{EI}{l^3} q & \text{при } |q| \leq \frac{l}{150}; \\ \left[\frac{7}{3} q + \frac{l}{90} \operatorname{sgn}(q) \right] \frac{EI}{l^3} & \text{при } |q| \geq \frac{l}{150}. \end{cases} \quad (24)$$

Соотношение жесткостей второго и первого участков упругой характеристики

$$\kappa = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\delta_{v\Sigma} D}{(\delta_{qq} \delta + D) \delta_{vv}} = \frac{1 + \delta / \delta_{vv}}{1 + \delta \delta_{qq} / D} = \frac{1 + 3/60}{1 + 12/15} = \frac{21 \cdot 15}{20 \cdot 27} = \frac{7}{12}. \quad (25)$$

Выполнив замены

$$t \leftarrow t \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad x = \frac{q}{q_0}, \quad (26)$$

приведем уравнение движения (12) к нормализованному виду:

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq 1; \\ \kappa x + (1 - \kappa) \operatorname{sgn} x & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (27)$$

Преимущество такой формы записи очевидно — она содержит лишь один безразмерный параметр κ . Обратный переход к размерным величинам осуществляется по соотношениям (26).

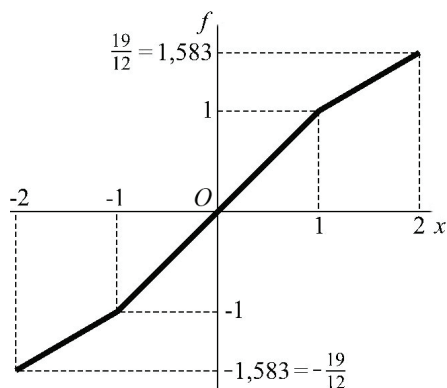


Рис. 10. Безразмерная характеристика системы

На рис. 10 приведена характеристика нормализованной системы (27), построенная в масштабе.

3. ПОЛУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЛОЧНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ УПРУГИЕ ОПОРЫ БЕЗ ЗАЗОРА И ОДНОСТОРОННИЕ ЖЕСТКИЕ ОПОРЫ С ЗАЗОРОМ

Рассмотрим изображенную на рис. 11, *а* консервативную механическую систему с одной степенью свободы. Аналогичная система предложена в одном из вариантов домашнего задания и отличается только числовыми значениями параметров. Упругий каркас системы — это балка с изгибной жесткостью EI , имеющая:

- упругую опору двустороннего действия (на растяжение и сжатие) с линейной жесткостью k на левом крае, ограничивающую вертикальные смещения балки вверх и вниз;
- две упругие опоры с податливостью δ (линейная жесткость k_Δ), установленные с зазором Δ на расстоянии l от левого края и ограничивающие вертикальные смещения балки вверх и вниз;
- шарнирную опору на правом крае.

На правом краю балки жестко закреплен массивный диск, физический момент инерции которого равен Θ .

Отметим, что расчетная схема с абсолютно жесткими опорами (рис. 11, *б*) есть частный случай схемы, показанной на рис. 11, *а* при нулевой податливости опор ($\delta = 0$), и в вариантах домашнего задания отдельно не рассматривается.

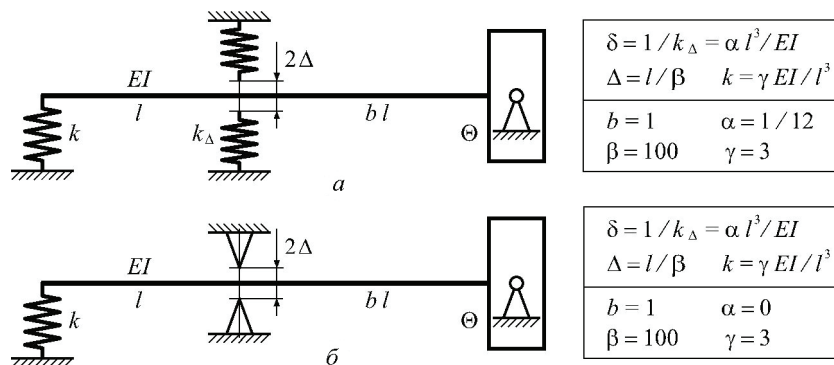


Рис. 11. Примеры (*а*, *б*) динамической системы с одной степенью свободы и жесткой кусочно-линейной характеристикой упругой системы

Нелинейность системы обусловлена наличием односторонних упругих опор с зазором Δ . Характеристика нелинейного элемента, представляющего собой совокупность двух таких опор, расположенных в одном сечении балки выше и ниже ее оси, показана на рис. 12, а. На рис. 12, б изображен частный случай характеристики для абсолютно жестких опор.

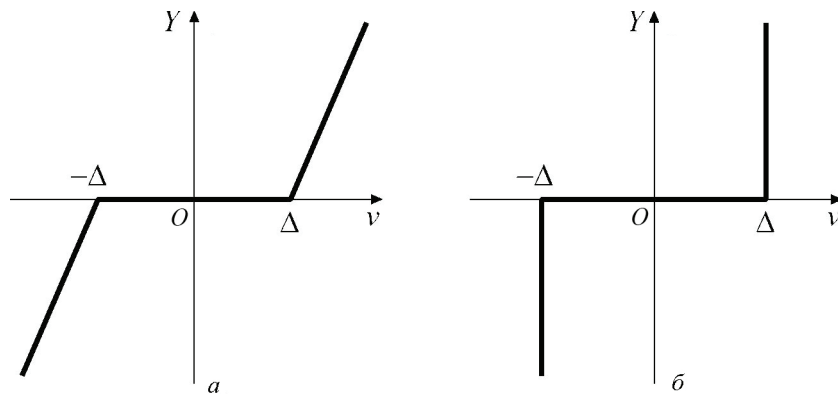


Рис.12. Характеристика нелинейного элемента

Аналитическая форма записи характеристики данного сочетания упругих опор имеет вид

$$\begin{cases} Y=0 & \text{при } |v| \leq \Delta; \\ Y=(v-\Delta \operatorname{sgn}(v)) / \delta \text{ (а) или } v = Y\delta + \Delta \operatorname{sgn}(v) \text{ (б)} & \text{при } |v| \geq \Delta, \end{cases} \quad (28)$$

где Y — сила; v — смещение; δ — податливость; Δ — зазор упругого элемента.

Для второго уравнения системы (28) форма (б) предпочтительнее формы (а), поскольку она пригодна и для опор с нулевой податливостью ($\delta = 0$), т. е. абсолютно жестких. Отметим, что выражения (28) повторяют выражения (11), но с обратным знаком Δ . Это позволяет рассматривать предварительное поджатие упругого элемента как отрицательный зазор. При этом для получения однозначной зависимости в элементах с поджатием следу-

ет считать силу аргументом, а смещение функцией, тогда как в элементах с зазором — смещение аргументом, а силу функцией.

Принимая угол поворота сечения балки в точке крепления диска за обобщенную координату q для данной системы, получим характеристику упругой системы $F(q)$ для каждого из случаев (28).

Отделим диск от упругого каркаса, как это показано на рис. 13. Примем, что обобщенное перемещение q и соответственно обобщенная сила $F(q)$ (момент, действующий со стороны диска на упругий каркас) направлены против хода часовой стрелки. Тогда момент воздействия упругого каркаса на диск согласно третьему закону Ньютона направлен по ходу часовой стрелки и равен $-F(q)$. Уравнение движения диска согласно второму закону Ньютона имеет вид

$$\ominus \frac{d^2 q}{dt^2} = -F(q). \quad (29)$$

Определяя перемещение q из рассмотрения равновесного деформирования безынерционного упругого каркаса под действием силы F , получаем зависимость $F(q)$. Для упрощения отыскания перемещений отделим нелинейный элемент. Оставшаяся часть упругого каркаса является линейной (рис. 14).

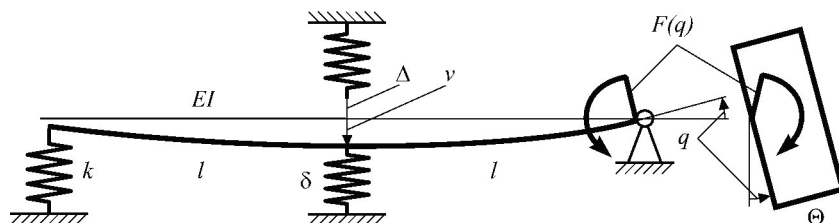


Рис. 13. Упругий каркас с отделенным массивным диском

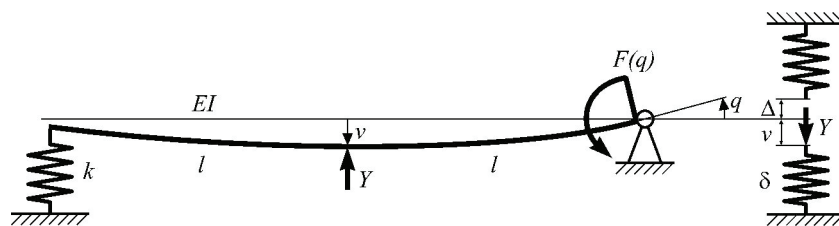


Рис. 14. Упругий каркас с отделенным нелинейным элементом

Зависимость $Y(v)$ силы взаимодействия балки с упругим нелинейным элементом от вертикального перемещения сечения балки в точке контакта показана на рис. 12, а и выражается формулами (28).

Вызванная действием двух сил (F и Y) деформация линейной части упругого каркаса подчиняется принципу суперпозиции (принцип независимости действия сил), поэтому перемещения характерных сечений $q(F, Y)$ и $v(F, Y)$ могут быть записаны в виде (13), где взаимные податливости δ_{kj} определяют согласно рис. 15. На этом рисунке показаны реакции (сила в левой опоре и момент в правой опоре) и эпюры изгибающих моментов от единичных нагрузок, приложенных по направлениям q и v к системе, схема и параметры которой заданы на рис. 11.

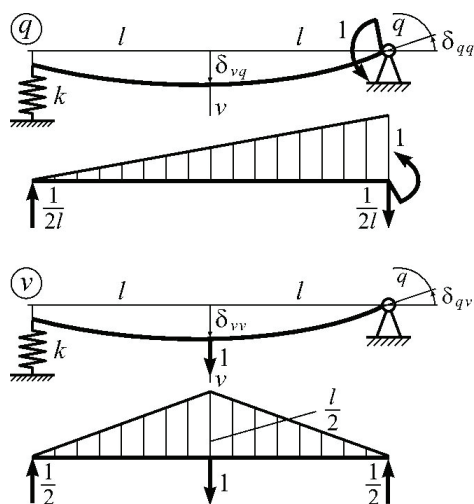


Рис. 15. К определению взаимных податливостей

Для взаимных податливостей остаются справедливы соотношения (14). При расчете податливостей следует учитывать не только деформацию самой балки, но и деформацию упругой опоры, т. е. применять формулу (15).

В результате получим следующие выражения для податливостей:

$$\begin{aligned}\delta_{qq} &= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \frac{l}{EI_x} = \frac{17}{12} \frac{l}{EI_x}; & \delta_{qv} &= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \frac{l^2}{EI_x} = \frac{l^2}{EI_x}; \\ \delta_{vv} &= \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{4}\right) \frac{l^3}{EI_x} = \frac{11}{12} \frac{l^3}{EI_x}; & D &= \left(\frac{17}{12} \cdot \frac{11}{12} - 1\right) \frac{l^4}{(EI_x)^2} = \frac{43}{144} \frac{l^4}{(EI_x)^2}.\end{aligned}\quad (30)$$

Зависимость $F(q)$ (характеристику системы) получим, решив систему уравнений (13) при различных значениях параметров. Пока момент F достаточно мал, смещение v остается меньше зазора Δ и реакция Y равна нулю (см. рис. 12). Таким образом, справедливо первое уравнение системы (28), т. е. $Y = 0$. Тогда из (13) следует, что

$$q = \delta_{qq}F; \quad v = \delta_{vq}F. \quad (31)$$

Коэффициент жесткости первого участка характеристики (5) системы

$$k_1 = \frac{1}{\delta_{qq}} = \frac{12}{17} \frac{EI_x}{l}. \quad (32)$$

Значения момента F_0 и угла поворота диска q_0 на стыке участков характеристики (см. рис. 4) находим из условия, что смещение v становится равным зазору Δ . Из (31) получаем соотношения

$$\begin{aligned}F_0 &= \frac{\Delta}{\delta_{vq}} = \frac{EI_x}{l^2} \Delta = \frac{1}{100} \frac{EI_x}{l}; \\ q_0 &= \delta_{qq}F_0 = \frac{17}{12} \frac{\Delta}{l} = \frac{17}{1200} \text{ рад} = 0,812^\circ.\end{aligned}\quad (33)$$

Если значение момента F превысит значение F_0 , то смещение v станет больше зазора Δ нелинейного упругого элемента и пружина начнет деформироваться. Это соответствует второму уравнению системы (28), и система уравнений (13) принимает вид

$$\begin{cases} q = \delta_{qq}F - \delta_{qv}Y; \\ Y\delta + \Delta \text{sgn}(v) = \delta_{vq}F - \delta_{vv}Y. \end{cases} \quad (34)$$

Из второго уравнения системы (34) получим

$$Y = \frac{\delta_{vq}}{\delta_{v\Sigma}} F - \frac{\Delta}{\delta_{v\Sigma}} \operatorname{sgn}(v) = \frac{F}{l} - \frac{1}{100} \frac{EI}{l^2} \operatorname{sgn}(v),$$

где $\delta_{v\Sigma} = \delta_{vv} + \delta = \left(\frac{11}{12} + \frac{1}{12} \right) \frac{l^3}{EI_x} = \frac{l^3}{EI_x}$ — полная податливость системы по направлению v , равная сумме податливостей балки и пружины нелинейного упругого элемента.

Заметим, что $\delta_{qq} \delta_{v\Sigma} - \delta_{vq}^2 = \delta_{qq} \delta + D$. Тогда из первого уравнения системы (34) следует, что

$$\begin{cases} F = \frac{\delta_{v\Sigma}}{\delta_{qq} \delta + D} q - \frac{\delta_{vq}}{\delta_{qq} \delta + D} \Delta = \\ = \left(\frac{144}{17+43} q - \frac{144}{17+43} \frac{\Delta}{l} \right) \frac{EI_x}{l} = \frac{12}{5} \left(q - \frac{\Delta}{l} \right) \frac{EI_x}{l}; \\ q = \left[\delta_{qq} - \frac{\delta_{vq}^2}{\delta_{v\Sigma}} \right] F + \frac{\delta_{vq}}{\delta_{v\Sigma}} \Delta = \left(\frac{17}{12} - 1 \right) \frac{Fl}{EI_x} + \frac{\Delta}{l} = \frac{5}{12} \frac{Fl}{EI_x} + \frac{\Delta}{l}. \end{cases} \quad (35)$$

Коэффициент жесткости второго участка характеристики (10) системы

$$k_2 = \frac{\delta_{v\Sigma}}{\delta_{qq} \delta + D} = \frac{12}{5} \frac{EI_x}{l}. \quad (36)$$

Разность жесткостей второго и первого участков упругой характеристики

$$k_1 - k_2 = \left(\frac{12}{17} - \frac{12}{5} \right) \frac{EI_x}{l} = \frac{60 - 204}{85} \frac{EI_x}{l} = -\frac{144}{85} \frac{EI_x}{l}, \quad (37)$$

а величина

$$(k_1 - k_2) q_0 = -\frac{144 \cdot 17}{85 \cdot 12} \frac{EI_x}{l} \frac{\Delta}{l} = -\frac{12}{5} \frac{EI_x}{l} \frac{\Delta}{l}.$$

Таким образом, получаем следующую характеристику системы:

$$F(q) = \begin{cases} \frac{12}{17} \frac{EI_x}{l} q & \text{при } |q| \leq \frac{17}{12} \frac{\Delta}{l}; \\ \frac{12}{5} \left[q - \frac{\Delta}{l} \operatorname{sgn}(q) \right] \frac{EI_x}{l} & \text{при } |q| \geq \frac{17}{12} \frac{\Delta}{l}. \end{cases} \quad (38)$$

Нелинейный элемент с абсолютно жесткими опорами и зазором (см. рис. 11, б) получим, положив податливость опор равной нулю ($\delta = 0$). Тогда полная податливость системы по направлению v

$$\delta_{v\Sigma} = \delta_{vv} = \frac{11}{12} \frac{l^3}{EI_x},$$

а из второго уравнения системы (34) следует, что

$$Y = \frac{12}{11} \left(\frac{F}{l} - \frac{1}{100} \frac{EI}{l^2} \operatorname{sgn}(v) \right).$$

Далее имеем

$$q = \left[\delta_{qq} - \frac{\delta_{vq}^2}{\delta_{vv}} \right] F + \frac{\delta_{vq}}{\delta_{vv}} \Delta = \left(\frac{17}{12} - \frac{12}{11} \right) \frac{Fl}{EI_x} + \frac{12}{11} \frac{\Delta}{l} = \frac{43}{132} \frac{Fl}{EI_x} + \frac{12}{11} \frac{\Delta}{l};$$

$$F = \frac{\delta_{vv}}{D} q - \frac{\delta_{vq}}{D} \Delta = \left(\frac{11 \cdot 12}{43} q - \frac{144}{43} \frac{\Delta}{l} \right) \frac{EI_x}{l} = \left(\frac{132}{43} q - \frac{144}{43} \frac{\Delta}{l} \right) \frac{EI_x}{l}. \quad (39)$$

Коэффициент жесткости второго участка характеристики (15) системы

$$k_2 = \frac{\delta_{vv}}{D} = \frac{132}{43} \frac{EI_x}{l}. \quad (40)$$

Разность жесткостей второго и первого участков упругой характеристики

$$k_1 - k_2 = \left(\frac{12}{17} - \frac{132}{43} \right) \frac{EI_x}{l} = \frac{516 - 2244}{17 \cdot 43} \frac{EI_x}{l} = -\frac{1728}{17 \cdot 43} \frac{EI_x}{l}, \quad (41)$$

а величина

$$(k_1 - k_2) q_0 = -\frac{1728}{43 \cdot 12} \frac{E I_x \Delta}{l} = \frac{144}{43} \frac{E I_x \Delta}{l}.$$

Таким образом, получаем следующую характеристику системы:

$$F(q) = \begin{cases} \frac{12}{17} \frac{E I_x}{l} q & \text{при } |q| \leq \frac{17 \Delta}{12 l}; \\ \frac{132}{43} \left[q - \frac{12 \Delta}{11 l} \operatorname{sgn}(q) \right] \frac{E I_x}{l} & \text{при } |q| \geq \frac{17 \Delta}{12 l}. \end{cases} \quad (42)$$

Соотношение жесткостей второго и первого участков упругой характеристики для (38) имеет вид

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\delta_{qq} \delta + D}{\delta_{v\Sigma} \delta_{qq}} = 1 - \frac{\delta_{vq}^2}{\delta_{qq} \delta_{v\Sigma}} = 1 - \frac{12}{17} = \frac{5}{17}; \quad \kappa = \frac{k_2}{k_1} = \frac{17}{5}, \quad (43)$$

а для (42)

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{D}{\delta_{qq} \delta_{vv}} = 1 - \frac{\delta_{vq}^2}{\delta_{qq} \delta_{vv}} = 1 - \frac{144}{17 \cdot 11} = \frac{43}{187}; \quad \kappa = \frac{k_2}{k_1} = \frac{187}{43}. \quad (44)$$

Выполнив замены (26), приведем уравнение движения (29) к нормализованному виду (27). На рис. 14 показана характеристика нормализованной системы (27), построенная в масштабе. Сплошная линия соответствует случаю упругих опор (43), а штриховая — абсолютно жестких опор (44).

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ОТ АМПЛИТУДЫ МЕТОДОМ ПРИПАСОВЫВАНИЯ

Консервативные системы с кусочно-линейной упругой характеристикой, рассмотренные выше, описываются обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с переменной структурой (5):

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 & \text{при } |x| \leq 1; \\ \ddot{x} + \kappa x + (1 - \kappa) \operatorname{sgn}(x) = 0 & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (45)$$

Рассмотрим движение с начальными условиями

$$x(0) = A; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (46)$$

При $A \leq 1$ решение соответствует первому уравнению системы (45) — первой ветви упругой характеристики — и имеет вид

$$x(t) = A \cos t; \quad \dot{x}(t) = -A \sin t. \quad (47)$$

В этом случае круговая частота и период свободных колебаний не зависят от амплитуды A и равны соответственно

$$\omega(A) \equiv 1; \quad T \equiv 2\pi. \quad (48)$$

При $A \geq 1$ период колебаний охватывает обе ветви упругой характеристики и вследствие ее симметрии состоит из четырех равных интервалов времени. Поэтому для его определения достаточно рассмотреть движение на первом из этих интервалов $0 \leq t \leq T/4$, когда координата x меняется от A до нуля. Моментом времени t_1 , когда координата x становится равной единице, этот интервал делится на два отрезка. На первом из них ($0 \leq t \leq t_1$) решение соответствует второму уравнению системы (45) — второй ветви упругой характеристики — и при условиях (46) имеет вид

$$x_2 = a_2 \cos \sqrt{\kappa} t + \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right); \quad \dot{x}_2 = -a_2 \sqrt{\kappa} \sin \sqrt{\kappa} t; \quad a_2 = A - 1 + \frac{1}{\kappa}. \quad (49)$$

Момент t_1 найдем из условия $x_2(t_1) = 1$:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arccos \frac{1}{S}; \quad S = a_2 \kappa = 1 + \kappa(A - 1). \quad (50)$$

На втором отрезке ($t_1 \leq t \leq T/4$) решение соответствует первой ветви упругой характеристики. Для дальнейших выкладок его удобнее записать, используя в качестве аргумента $\tau = t - t_1$. Это

возможно, так как $dt = d\tau$ и дифференциальное уравнение относительно τ совпадает с первым уравнением системы (45):

$$x_1 = a_1 \cos \tau + b_1 \sin \tau; \quad \dot{x}_1 = -a_1 \sin \tau + b_1 \cos \tau. \quad (51)$$

При стыковке решений необходимо обеспечить непрерывность функции и ее производной, т. е. должны выполняться условия

$$x_1(0) = 1; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(t_1). \quad (52)$$

Отсюда

$$a_1 = 1; \quad b_1 = -a_2 \sqrt{\kappa} \sin \left(\arccos \frac{1}{S} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{S^2 - 1} = -\sqrt{\frac{S^2 - 1}{\kappa}}. \quad (53)$$

При $\tau_1 = T/4 - t_1$ имеем $x_1 = 0$, откуда $\tau_1 = \arctg \sqrt{\frac{\kappa}{S^2 - 1}}$, и окончательно

$$\omega(A) = \frac{2\pi}{T}; \quad T = 4 \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \arccos \frac{1}{S} + \arctg \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{S^2 - 1}} \right); \quad S = 1 + \kappa(A - 1). \quad (54)$$

Формулы (54) позволяют проанализировать зависимость частоты ω свободных колебаний от амплитуды A нелинейной системы с симметричной кусочно-линейной упругой характеристикой при $A \geq 1$.

Если $A = 1$, то $S = 1$, $T = 2\pi$ и $\omega = 1$, т. е. выполняются условия стыковки решения (54) с решением (48).

При $A \rightarrow \infty$ имеем $S \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 2\pi/\sqrt{\kappa}$ и $\omega \rightarrow \sqrt{\kappa}$, т. е. частота нелинейной системы асимптотически стремится к частоте линейной системы, имеющей жесткость, равную жесткости второго участка кусочно-линейной упругой характеристики. Это видно на рис. 17–19, где представлены результаты расчетов по формулам (54) для характеристик с $\kappa = 7/12$ (25), $17/5$ (43), $187/43$ (44) соответственно (рис. 17, 18, 19, *a* при $1 \leq A \leq 10$ и *b* при $1 \leq A \leq 2$ — более подробные). На этих же рисунках для сопоставления показаны и результаты расчетов по рассматриваемому ниже методу прямой линеаризации.

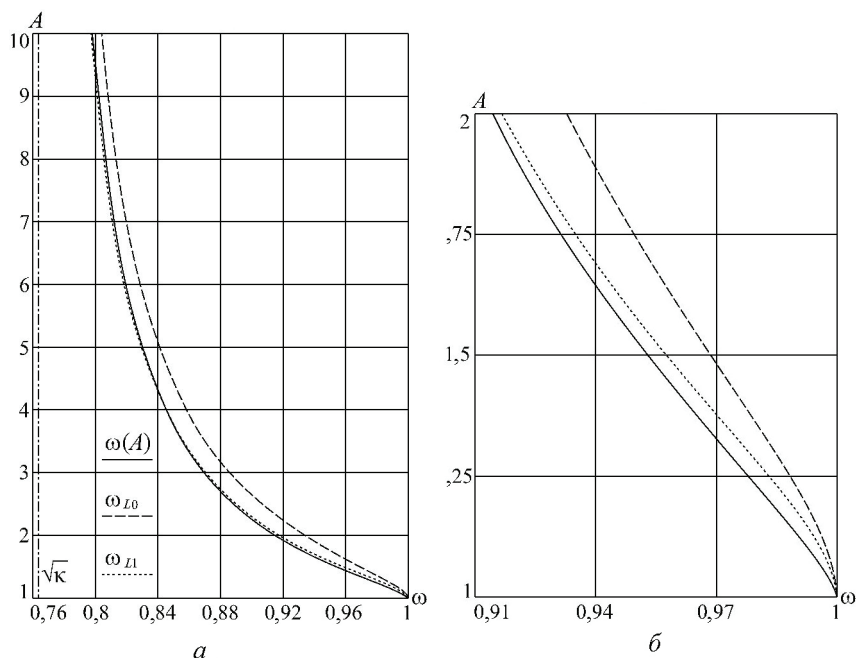


Рис. 17. Зависимость частоты колебаний ω от амплитуды A при $\kappa = 7/12$ ($\sqrt{\kappa} = 0,763763$):

ω — метод приспособывания (точный); ω_{L0} — метод прямой линеаризации (без веса); ω_{L1} — метод прямой линеаризации (по Я.Г. Пановко)

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ПРЯМОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод основан на замене нелинейной характеристики данной системы $f(x)$ линейным выражением $K_L x$ и пригоден для расчета упругих характеристик любого вида в отличие от метода приспособывания, область применения которого ограничена системами с кусочно-линейными характеристиками.

Коэффициент K_L подбирают так, чтобы отклонение линеаризованной характеристики от заданной было наименьшим во всем диапазоне изменения обобщенного перемещения x при колебаниях. В общем случае за меру отличия характеристик может быть

принят интеграл от квадрата произведения их разности и весового коэффициента, равный n -й степени смещения x , взятый по всему интервалу изменения x . При симметричной характеристике интеграл берется по половине интервала, т. е.

$$I(K_{L_n}) = \int_0^A \left\{ [f(x) - K_{L_n} x] x^n \right\}^2 dx. \quad (55)$$

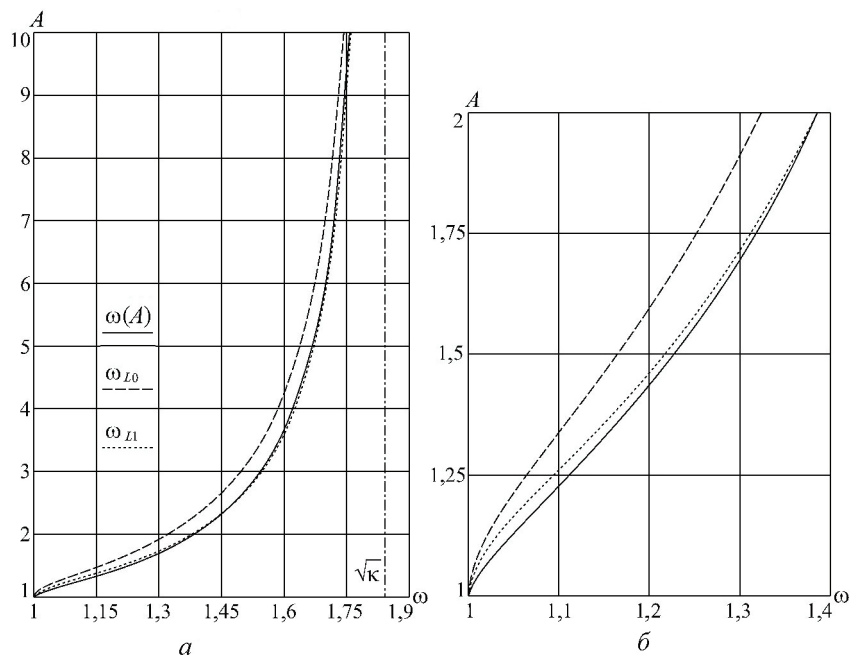


Рис. 18. Зависимость частоты колебаний ω от амплитуды A при $\kappa = 17/5$ ($\sqrt{\kappa} = 1,8439$):

ω — метод припасовывания (точный); ω_{L_0} — метод прямой линеаризации (без веса); ω_{L_1} — метод прямой линеаризации (по Я.Г. Пановко)

Записав необходимое условие минимума этой величины ($\partial I / \partial K_{L_n} = 0$), получим

$$K_{Ln} \int_0^A x^{2n+2} dx = \int_0^A f(x) x^{2n+1} dx$$

или

$$K_{Ln} = \frac{2n+3}{A^{2n+3}} \int_0^A f(x) x^{2n+1} dx. \quad (56)$$

Для кусочно-линейной характеристики $f(x)$ вида (27) имеем:

$$K_{Ln} = \begin{cases} 1 & \text{при } A < 1; \\ \kappa + \frac{1-\kappa}{2n+2} \frac{1}{A} \left(2n+3 - \frac{1}{A^{2n+2}} \right) & \text{при } A \geq 1. \end{cases} \quad (57) \quad (a)$$

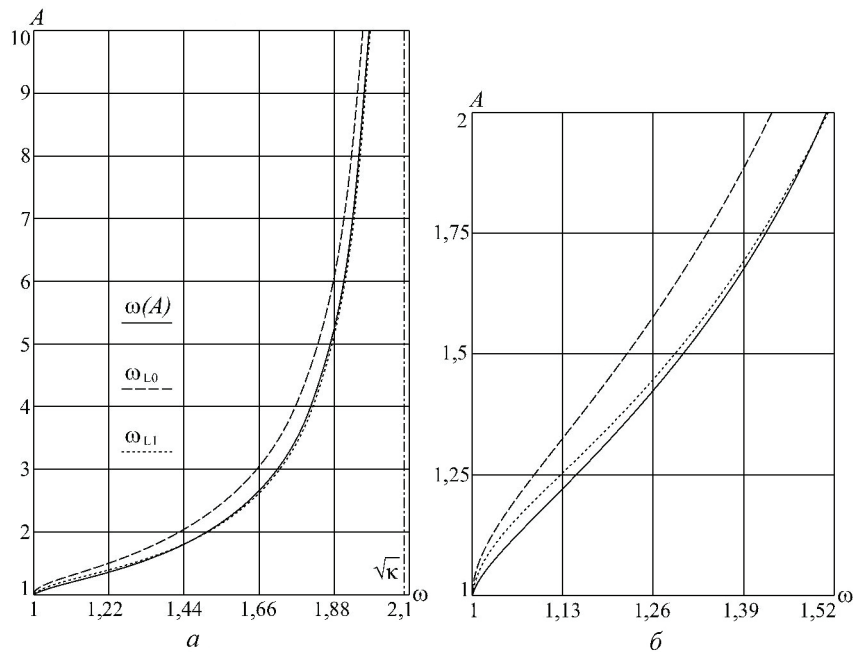


Рис. 19. Зависимость частоты колебаний ω от амплитуды A при $\kappa = 187/43$ ($\sqrt{\kappa} = 2,0854$):

ω — метод приспособывания (точный); ω_{L0} — метод прямой линеаризации (без веса); ω_{L1} — метод прямой линеаризации (по Я.Г. Пановко)

Проанализируем зависимость K_{Ln} от амплитуды A свободных колебаний системы с симметричной кусочно-линейной упругой характеристикой.

1. Если в варианте (б) формулы (57) $A = 1$, то $K_{Ln} = 1$. Значит, выполняется условие стыковки с вариантом (а) той же формулы.

2. Если в варианте (б) формулы (57) $A \rightarrow \infty$, то $K_{Ln} \rightarrow \kappa$ (жесткость линеаризованной характеристики асимптотически стремится к жесткости второго участка кусочно-линейной характеристики).

Таким образом, поведение решения (57), полученного методом прямой линеаризации, качественно совпадает с поведением решения (54), полученного точным методом.

Рассмотрим два частных случая формулы (57), наиболее важных с практической точки зрения. Первый — это простая линеаризация без весового коэффициента ($n = 0$):

$$K_{L0} = \kappa + \frac{1-\kappa}{2} \frac{1}{A} \left(3 - \frac{1}{A^2} \right). \quad (58)$$

Я.Г. Пановко [8] предложил умножать разность характеристик на весовой коэффициент, равный смещению. В этом случае $n = 1$ и

$$K_{L1} = \kappa + \frac{1-\kappa}{4} \frac{1}{A} \left(5 - \frac{1}{A^4} \right). \quad (59)$$

На рис. 17, 18, 19 представлены графики для характеристик с $\kappa = 7/12$ (25), $17/5$ (43), $187/43$ (44) соответственно, где зависимости $\omega_{L0} = \sqrt{K_{L0}}$ (штриховая линия) и $\omega_{L1} = \sqrt{K_{L1}}$ (пунктирная линия) от амплитуды A в диапазонах (а) $1 \leq A \leq 10$ и (б) $1 \leq A \leq 2$ совмещены с зависимостью $\omega(A)$ (сплошная линия), полученной точным методом.

Сопоставление этих графиков показывает, что более близкий к точному результат дает линеаризация по методу Я.Г. Пановко (59).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Домашнее задание «КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ»

Условия домашнего задания

Для заданной консервативной механической системы с одной степенью свободы и с кусочно-линейной характеристикой упругого закрепления (см. рис. 4) требуется:

1) определить характеристику упругого закрепления обобщенной массы в виде (10) (в качестве примера см. формулы (24), (38), (42)). При $E = 200$ ГПа, $l = 1$ м, $I_x = 5 \cdot 10^{-9}$ м⁴ найти размерные значения q_0 и F_0 ;

2) вывести уравнение колебаний; с помощью выбора масштабов времени и обобщенной координаты (26) привести уравнение к нормализованному виду (27);

3) построить в масштабе безразмерную характеристику системы (см. рис. 10 и 16);

4) определить зависимость амплитуды свободных колебаний A от частоты ω при $\max(A) = 2$ и $\max(A) = 10$ (в безразмерном виде):

– методом припасовывания $A(\omega)$;

– методом прямой линеаризации $A_L(\omega)$;

5) совместить на одной координатной сетке графики полученных зависимостей $A(\omega)$ и $A_L(\omega)$; вычислить размерные значения асимптот графиков при $m = 400$ кг, $\Theta = 25$ кг·м².

При защите домашнего задания требуется методом Пуанкаре — Линдштедта построить скелетную кривую для консервативного осциллятора с одной степенью свободы, имеющего полиномиальную характеристику упругого элемента.

Варианты домашнего задания

Исходные данные сведены в таблицу. Для каждого варианта, указанного в первом столбце, заданы номер расчетной схемы (второй столбец) и числовые значения безразмерных коэффициентов, определяющих ее механические свойства.

№	Сх.	$1/\alpha$	β	γ	η	№	Сх.	$1/\alpha$	β	γ	η	№	Сх.	$1/\alpha$	β	γ	η
1	1	8	128	12	1	25	1	12	128	8	1	49	1	8	128	12	2
2	2	8	128	12	1	26	2	12	128	8	1	50	2	8	128	12	2
3	3	8	128	12	1	27	3	12	128	8	1	51	3	8	128	12	2
4	4	8	128	12	1	28	4	12	128	8	1	52	4	8	128	12	2
5	5	8	128	12	1	29	5	12	128	8	1	53	5	8	128	12	2
6	6	8	128	12	1	30	6	12	128	8	1	54	6	8	128	12	2
7	7	8	128	12	1	31	7	12	128	8	1	55	7	8	128	12	2
8	8	8	128	12	1	32	8	12	128	8	1	56	8	8	128	12	2
9	9	8	128	12	1	33	9	12	128	8	1	57	9	8	128	12	2
10	10	8	128	12	1	34	10	12	128	8	1	58	10	8	128	12	2
11	11	8	128	12	1	35	11	12	128	8	1	59	11	8	128	12	2
12	12	8	128	12	1	36	12	12	128	8	1	60	12	8	128	12	2
13	13	8	128	12	1	37	13	12	128	8	1	61	13	8	128	12	2
14	14	8	128	12	1	38	14	12	128	8	1	62	14	8	128	12	2
15	15	8	128	12	1	39	15	12	128	8	1	63	15	8	128	12	2
16	16	8	128	12	1	40	16	12	128	8	1	64	16	8	128	12	2
17	17	8	128	12	1	41	17	12	128	8	1	65	17	8	128	12	2
18	18	8	128	12	1	42	18	12	128	8	1	66	18	8	128	12	2
19	19	8	128	12	1	43	19	12	128	8	1	67	19	8	128	12	2
20	20	8	128	12	1	44	20	12	128	8	1	68	20	8	128	12	2
21	21	8	128	12	1	45	21	12	128	8	1	69	21	8	128	12	2
22	22	8	128	12	1	46	22	12	128	8	1	70	22	8	128	12	2
23	23	8	128	12	1	47	23	12	128	8	1	71	23	8	128	12	2
24	24	8	128	12	1	48	24	12	128	8	1	72	24	8	128	12	2

	<p>Схема № 1</p> $\delta = 1/k_D = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 2</p> $\delta = 1/k_D = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 3</p> $\delta = 1/k_D = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 4</p> $\delta = 1/k_D = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 5</p> $\delta = 1/k_D = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 6</p> $\delta = 1/k_D = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$

	<p>Схема № 7</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 8</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 9</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 10</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 11</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 12</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$

	<p>Схема № 13</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 14</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 15</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 16</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 17</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 18</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$

	<p>Схема № 19</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 20</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 21</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 22</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 23</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$
	<p>Схема № 24</p> $\delta = 1/k_{\Delta} = l^3/\alpha EI$ $\Delta = P\delta = l/\beta$ $k = \gamma EI/l^3$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
2. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем: Пер. с фр. М.: Мир, 1965. 400 с.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. *Ден-Гартог Дж.П.* Механические колебания: Пер. с англ. М.: Физматлит, 1960. 580 с.
5. *Каудерер Г.* Нелинейная механика: Пер. с нем. М.: Иностран. лит., 1961. 777 с.
6. *Найфе А.* Методы возмущений: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 455 с.
7. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 252 с.
8. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
1. Простые нелинейные механические колебательные системы с одной степенью свободы. Основные разновидности характеристик	8
2. Получение характеристики колебательной системы типа балки с упругими опорами, в том числе предварительно поджатыми	14
3. Получение характеристики балочной колебательной системы, имеющей упругие опоры без зазора и односторонние жесткие опоры с зазором	22
4. Определение зависимости частоты колебаний от амплитуды методом припасовывания	29
5. Определение частоты колебаний методом прямой линеаризации	32
<i>Приложение. Домашнее задание «Колебания системы с кусочно-линейной силовой характеристикой»</i>	<i>36</i>
Литература	42

Учебное издание

Гуськов Александр Михайлович
Ярьско Сергей Васильевич

**Анализ колебаний консервативных
нелинейных систем с одной степенью свободы**

Учебное пособие

Редактор *С.А. Серебрякова*
Корректор *Е.К. Кошелева*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

Подписано в печать 25.01.2013. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,56. Тираж 100 экз. Изд. № 137. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.